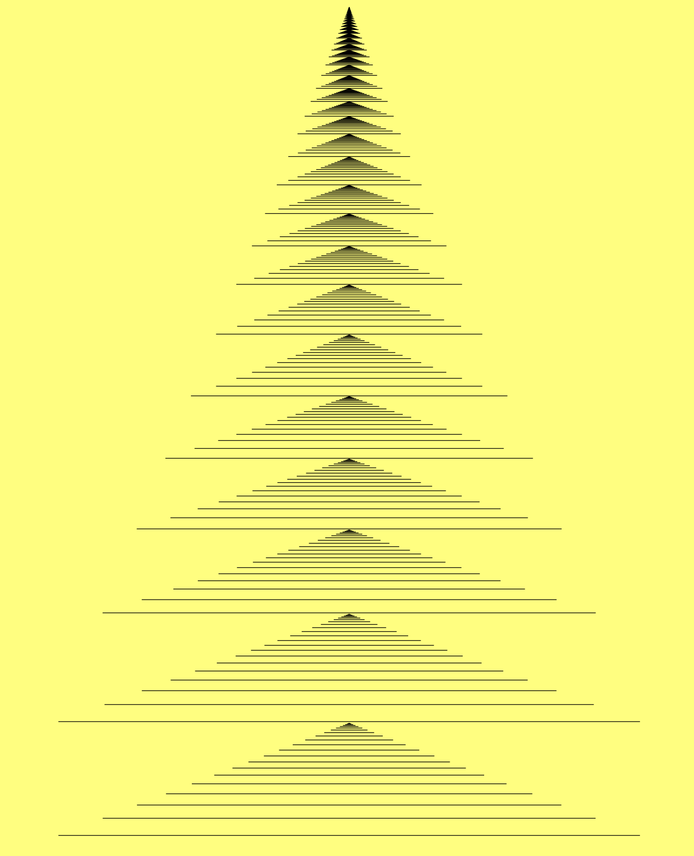
ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μια περιήγηση στα θεμέλια των μαθηματικών



Γ. Π. Πέρρος

ΣΥΝΟΛΑ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μια περιήγηση στα θεμέλια των μαθηματικών

Γ. Π. Πέρρος

Μάρτιος 2015

Στους γονείς μου, με "υπερπεπερασμένη" ευγνωμοσύνη

Όπως όλοι οι άνθρωποι της Βιβλιοθήκης, έχω ταξιδέψει κάμποσο στα νιάτα μου· έχω περιπλανηθεί αναζητώντας ένα βιβλίο, ίσως τον κατάλογο όλων των καταλόγων.

Η Βιβλιοθήκη της Βαβέλ
Χορχε Λουις Μπορχες

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η έννοια του συνόλου καταλαμβάνει κεντρική θέση στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, το σύστημα των πραγματικών αριθμών, έτσι όπως συνήθως θεμελιώνεται αξιωματικά, αποτελείται από ένα **σύνολο** $\mathbb{R}$ (εφοδιασμένο με κάποια "δομή") το οποίο έχει ορισμένες βασικές ιδιότητες. Μία από τις ιδιότητες αυτές (και μάλλον η πιο καθοριστική) είναι το αξίωμα του ελάχιστου άνω φράγματος, που ως γνωστόν αναφέρεται σε **υποσύνολα** του $\mathbb{R}$. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο, και ίσως εκ πρώτης όψεως να φαίνεται απίθανο, είναι το γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε το $\mathbb{R}$ και να αποδείξουμε όλες τις βασικές του ιδιότητες χρησιμοποιώντας μόνο σύνολα. Στο παρόν βιβλίο δίνονται δύο τέτοιες κατασκευές. Έτσι, ίσως τελικά δεν θα ήταν υπερβολή να ισχυριστούμε ότι στα μαθηματικά τα πάντα κατ' ουσίαν είναι σύνολα.

Στο πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου γίνεται μία διαισθητική μελέτη των συνόλων, καθώς και μία σύντομη παρουσίαση της λογικής η οποία διέπει τους μαθηματικούς συλλογισμούς εν γένει. Εδώ ο αναγνώστης θα βρει όλες τις βασικές συνολοθεωρητικές έννοιες πάνω στις οποίες στηρίζεται η άλγεβρα και η ανάλυση. Στις έννοιες αυτές συγκαταλέγονται, όπως είναι φυσικό, οι συναρτήσεις και οι σχέσεις.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι μια σύντομη εισαγωγή στην άλγεβρα. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στους δακτυλίους, τα σώματα, τους ομομορφισμούς δακτυλίων, και τα ιδεώδη.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξηγώ πώς μπορούν να κατασκευστούν τα διάφορα συστήματα αριθμών (ακέραιοι, ρητοί, πραγματικοί, μιγαδικοί) χρησιμοποιώντας μόνο συνολοθεωρητικά μέσα. Περισσότερο ενδιαφέρον αλλά και δυσκολία παρουσιάζει η κατασκευή των πραγματικών αριθμών, η οποία γίνεται με δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους: (1) με τομές Dedekind, και (2) με ακολουθίες Cauchy.

Στο τέταρτο (και τελευταίο) κεφάλαιο, η θεωρία συνόλων τοποθετείται σε αξιωματική βάση και επεκτείνεται στη μελέτη των διατακτικών και πληθικών αριθμών. Μεταξύ των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, εξέχουσα θέση κατέχει το αξίωμα επιλογής. Εξετάζω διάφορες ισοδύναμες μορφές του εν λόγω αξιώματος, καθώς και κάποιες αναπάντεχες συνέπειές του. Το κεφάλαιο αυτό είναι συνέχεια του πρώτου κεφαλαίου και μπορεί να διαβαστεί ανεξάρτητα από τα κεφάλαια 2 και 3.

Η κατανόηση του βιβλίου δεν απαιτεί κάποιες ειδικές γνώσεις. Αρκεί μια εξοικείωση με τον μαθηματικό τρόπο του συλλογίζεσθαι. Ο αναγνώστης όμως που αποφασίζει να εντρυφήσει στις λεπτομέρειες, θα πρέπει να συμπληρώσει μόνος του αρκετά κενά, καθώς κάποιες "εύκολες" αποδείξεις θεωρημάτων έχουν παραληφθεί και πολλές άλλες αποδείξεις είναι γραμμένες με λακωνικό ύφος. Γενικά προσπάθησα να περιορίσω στον μέγιστο δυνατό βαθμό το μέγεθος του βιβλίου. Έτσι εξηγείται και η παντελής απουσία ιστορικών και βιογραφικών σημειωμάτων. (Εξάλλου, τι το έχομεν το ίντερνετ;) Χρησιμοποιώ αρκετά συχνά τη συντομογραφία *αντ.*, η οποία σημαίνει "αντιστοίχως". Ο συμβολισμός $:=$ σημαίνει "εξ ορισμού ίσο με" (αν και μερικές φορές γράφω $=$ αντί για $:=$), ο συμβολισμός $:\Leftrightarrow$ σημαίνει "εξ ορισμού ισοδύναμο με", και το μαύρο τετραγωνάκι $\blacksquare$ σηματοδοτεί το τέλος μιας απόδειξης.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη γυναίκα μου για την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε σε γλωσσικά θέματα, καθώς και για τη γενικότερη συμπαράστασή της σε όλες τις φάσεις της προετοιμασίας του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Μάρτιος 2015 Γ. Π. Πέρρος

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων

1.1 Σύνολα

Με τον όρο **σύνολο** εννοούμε μια συλλογή αντικειμένων του φυσικού κόσμου ή της νόησής μας. Παραδείγματα: το σύνολο των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος, το σύνολο των εραστών της Κλεοπάτρας, το σύνολο των άθλων του Ηρακλή. Μερικά από τα συχνότερα εμφανιζόμενα σύνολα στα μαθηματικά είναι σύνολα αριθμών, όπως:

- το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών $0, 1, 2, 3, \ldots$,
- το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακέραιων αριθμών $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$,
- το σύνολο $\mathbb{Z}^+$ των θετικών ακέραιων αριθμών $1, 2, 3, \ldots$,
- το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών,
- το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ των θετικών ρητών αριθμών,
- το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών,
- το σύνολο $\mathbb{R}^+$ των θετικών πραγματικών αριθμών,
- το διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x οι οποίοι ικανοποιούν $0 \leq x \leq 1$,
- το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Τα αντικείμενα από τα οποία αποτελείται ένα σύνολο A λέγονται **στοιχεία** ή **μέλη** του A. Αν το x είναι στοιχείο του A, τότε λέμε επίσης ότι το x **ανήκει** στο A και γράφουμε συμβολικά

$$x \in A$$

ή (σπανιότερα)

$$A \ni x.$$

Ο συμβολισμός

$$x \notin A$$

σημαίνει ότι το x δεν είναι στοιχείο του A. Για παράδειγμα, έχουμε

$$8 \in \mathbb{N}, \quad 965 \in \mathbb{N}, \quad 10^{100} \in \mathbb{N},$$

αλλά

$$-4 \notin \mathbb{N}, \quad \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{N}.$$

Κάθε σύνολο καθορίζεται πλήρως από τα στοιχεία του. Έτσι, αν δύο σύνολα A και B έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$.

Παράδειγμα 1.1 Έστω A το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$$x^3 - x = 0$$

και έστω B το σύνολο όλων των ακέραιων αριθμών n οι οποίοι ικανοποιούν

$$-\frac{3}{2} < n < \frac{4}{3}\,.$$

Τα δύο αυτά σύνολα αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία, δηλαδή τους αριθμούς 0, 1 και -1. Συνεπώς $A = B$.

Σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων, όπως το $\mathbb{N}$ ή το $\mathbb{R}$, λέγονται **άπειρα σύνολα** ή **απειροσύνολα**. Σύνολα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, όπως το σύνολο A του Παραδείγματος 1.1, λέγονται **πεπερασμένα σύνολα**.

Αν ένα σύνολο A είναι πεπερασμένο και έχει σχετικά μικρό πλήθος στοιχείων, τότε το A μπορεί να παρασταθεί με τη **μέθοδο της αναγραφής** των στοιχείων του, δηλαδή εγκλείοντας τα στοιχεία αυτά σε άγκιστρα. Για παράδειγμα, αν A είναι το σύνολο των πρώτων αριθμών οι οποίοι είναι μικρότεροι του 23, τότε

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}\,.$$

Γενικά, ένα πεπερασμένο σύνολο με στοιχεία $a_1, a_2, \ldots, a_n$ γράφεται

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Το σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία γράφονται τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ή από τυχόν επαναλήψεις κάποιων a_i. Για παράδειγμα,

$$\{1,4,9\} = \{4,1,9\} = \{9,9,1,4,4,4\}.$$

Ένα σύνολο της μορφής $\{a, b\}$ λέγεται (**μη διατεταγμένο**) **ζεύγος** των a, b. Έτσι, τα σύνολα

$$\{-10,-5\}, \quad \left\{\sqrt{7}, \sqrt{7}\right\}$$

είναι ζεύγη. (Προσοχή: Ένα ζεύγος μπορεί να περιέχει ένα μόνο στοιχείο.) Ένα σύνολο της μορφής $\{a\}$ λέγεται **μονοσύνολο** του a.

Αν $a_1, a_2, a_3, \ldots$ είναι μια άπειρη ακολουθία αντικειμένων, τότε το σύνολο όλων των όρων της ακολουθίας γράφεται

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Έτσι,

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι το σύνολο $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ μπορεί να είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα,

$$\left\{(-1)^1, (-1)^2, (-1)^3, \ldots\right\} = \{-1, 1\}.$$

1.2 Λογική

Μια γλωσσική έκφραση φ λέγεται **προτασιακός τύπος** (ή απλά **τύπος**) αν έχει νόημα η ερώτηση:

Είναι αληθές ότι φ;

Μερικά παραδείγματα προτασιακών τύπων:

(i) Το 18 είναι άρτιος αριθμός.

(ii) $3 \cdot 4 = 7$.

(iii) $5n < p$.

Ο τύπος (i) είναι αληθής, ενώ ο τύπος (ii) είναι ψευδής. Λέμε επίσης ότι ο (i) έχει **αληθοτιμή** (ή **τιμή αληθείας**) Α, ενώ ο (ii) έχει αληθοτιμή Ψ. Η αληθοτιμή του τύπου (iii) εξαρτάται από τις μεταβλητές n και p. Έτσι, για $n = 8$ και $p = 43$, ο τύπος (iii) έχει αληθοτιμή Α, ενώ για $n = 10$ και $p = 46$ ο ίδιος τύπος έχει αληθοτιμή Ψ.

Κάθε μεταβλητή που εμφανίζεται σε έναν προτασιακό τύπο επιτρέπεται να πάρει τιμές από ένα προκαθορισμένο σύνολο αντικειμένων που λέγεται **σύνολο αναφοράς** της εν λόγω μεταβλητής. Π.χ. στον τύπο

$$\mathrm{MK\Delta}\,(x, y) = 1$$

(όπου ΜΚΔ σημαίνει μέγιστος κοινός διαιρέτης) το σύνολο αναφοράς των μεταβλητών x, y είναι το $\mathbb{Z}$.

Έστω φ και ϑ δύο προτασιακοί τύποι (οι οποίοι δεν είναι απαραίτητο να έχουν κάποια νοηματική σχέση). Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα

$$\neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \Rightarrow, \quad \Leftrightarrow,$$

που λέγονται **σύνδεσμοι**, μπορούμε να σχηματίσουμε νέους τύπους:

- Την **άρνηση** του φ,
$$\neg\varphi,$$
που σημαίνει "όχι φ".[1]

- Τη **σύζευξη** των φ και ϑ,
$$\varphi \wedge \vartheta,$$
που σημαίνει "φ και ϑ".

- Τη **διάζευξη** των φ και ϑ,
$$\varphi \vee \vartheta,$$
που σημαίνει "φ ή ϑ".

- Τη **συνεπαγωγή** του ϑ από τον φ,
$$\varphi \Rightarrow \vartheta,$$
που σημαίνει "φ συνεπάγεται ϑ" (δηλαδή "αν φ, τότε ϑ").

[1] Έτσι, οι τύποι $x \notin A$ και $\neg\,(x \in A)$ έχουν ακριβώς το ίδιο νόημα.

- Την **ισοδυναμία** των φ και ϑ,

$$\varphi \Leftrightarrow \vartheta,$$

που σημαίνει "φ αν και μόνον αν ϑ".

Οι αληθοτιμές των τύπων αυτών καθορίζονται από τις αληθοτιμές των φ και ϑ σύμφωνα με τους παρακάτω **πίνακες αληθείας**:

φ	$\neg\varphi$
Α	Ψ
Ψ	Α

φ	ϑ	$\varphi \wedge \vartheta$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

φ	ϑ	$\varphi \vee \vartheta$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

φ	ϑ	$\varphi \Rightarrow \vartheta$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

φ	ϑ	$\varphi \Leftrightarrow \vartheta$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Παράδειγμα 1.2 Οι ακόλουθοι τύποι είναι αληθείς:

(i) $\neg\left(3^2 = 6\right)$.

(ii) $1 + 1 = 2 \ \wedge \ 4 \cdot 5 = 20$.

(iii) $-8 < 0 \ \vee \ 17 - 3 = 12$.

(iv) $\frac{1}{1000} \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(v) $-5 \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow$ το $\mathbb{R}$ είναι πεπερασμένο σύνολο.

Παράδειγμα 1.3 Οι ακόλουθοι τύποι είναι ψευδείς:

(i) $\neg\left(\frac{40}{10} = 4\right)$.

(ii) $7^2 = 49 \ \wedge \ 8 + 8 = 28$.

(iii) $0 < -1 \ \vee \ -1 \notin \mathbb{Z}$.

(iv) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(v) $(2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2 \ \Leftrightarrow \ \mathbb{R} = \mathbb{Q}$.

Άσκηση 1.4 Σε κάποιο δικαστήριο έγινε ο εξής διάλογος:
Εισαγγελέας: «Αν ο κατηγορούμενος είναι ένοχος, τότε έχει συνεργό.»
Συνήγορος: «Αυτό δεν είναι αληθές!!»
Τι γκάφα έκανε ο συνήγορος;

Μερικές φορές αντί για

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n, \quad \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \cdots \vee \varphi_n$$

γράφουμε

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i, \quad \bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

αντιστοίχως. Ο τύπος $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ είναι αληθής αν και μόνον αν καθένας από τους τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ είναι αληθής. Ο τύπος $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ είναι αληθής αν και μόνον αν τουλάχιστον ένας από τους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ είναι αληθής.

Εκτός από συνδέσμους, ένας προτασιακός τύπος μπορεί να περιέχει και **ποσοδείκτες**. Αυτοί είναι:

- Ο **καθολικός ποσοδείκτης**
$$\forall,$$
που σημαίνει "για κάθε".
- Ο **υπαρξιακός ποσοδείκτης**
$$\exists,$$
που σημαίνει "υπάρχει".
- Ο **ποσοδείκτης μοναδικότητας**
$$\exists!,$$
που σημαίνει "υπάρχει μοναδικό".

Οι ποσοδείκτες κανονικά συνοδεύονται από μεταβλητές. Έτσι, οι συμβολικές εκφράσεις

$$\forall x, \quad \exists y, \quad \exists! z$$

σημαίνουν: "για κάθε x", "υπάρχει (τουλάχιστον ένα) y τέτοιο ώστε", "υπάρχει μοναδικό z τέτοιο ώστε", αντιστοίχως. Για να είναι σαφές το νόημα ενός τύπου στον οποίο εμφανίζονται ποσοδείκτες, θα πρέπει να γνωρίζουμε εκ των προτέρων τα σύνολα αναφοράς των μεταβλητών που συνοδεύουν τους εν λόγω ποσοδείκτες.

Οι μεταβλητές από τις οποίες εξαρτάται η αληθοτιμή ενός τύπου λέγονται **ελεύθερες μεταβλητές** του τύπου. Ο αριθμός των ελεύθερων μεταβλητών μειώνεται με την προσθήκη ποσοδεικτών. Για παράδειγμα, από τον τύπο

$$y - 7 > x$$

με ελεύθερες μεταβλητές y και x που συμβολίζουν πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να σχηματίσουμε τον τύπο

$$\exists y \, (y - 7 > x)$$

με ελεύθερη μεταβλητή μόνο το x, και στη συνέχεια τον τύπο

$$\forall x \exists y \, (y - 7 > x)$$

ο οποίος δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές.

Αν όλες οι ελεύθερες μεταβλητές ενός τύπου φ είναι μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$, τότε ο τύπος γράφεται και ως

$$\varphi \, (x_1, \ldots, x_n) \, .$$

Ο συμβολισμός αυτός δεν υπονοεί ότι κάθε x_i είναι ελεύθερη μεταβλητή του φ. Μάλιστα, μπορεί κάποιες από τις μεταβλητές x_i να μην εμφανίζονται καθόλου στον φ. Ο τύπος $\varphi \, (x_1, \ldots, x_n)$ λέγεται και **συνθήκη** πάνω στις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$. Ένας τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές λέγεται **πρόταση**.

Για εξοικονόμηση παρενθέσεων, συμφωνούμε ότι τα σύμβολα $\wedge$ και $\vee$ συνδέουν ισχυρότερα από ό,τι τα $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$, ενώ τα σύμβολα $\neg$, $\forall$, $\exists$, $\exists!$ έχουν τη μικρότερη δυνατή εμβέλεια. Π.χ. ο τύπος

$$\neg\varphi_1 \wedge \exists x \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3$$

πρέπει να διαβαστεί ως

$$[(\neg\varphi_1) \wedge \exists x \varphi_2] \Rightarrow \varphi_3.$$

Επίσης, μερικές φορές αντί για

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \varphi, \quad \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \varphi$$

γράφουμε

$$(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \varphi, \quad (\exists x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \varphi,$$

αντιστοίχως.

Δύο τύποι φ, ϑ λέγονται **λογικά ισοδύναμοι** αν έχουν πάντα την ίδια αληθοτιμή (δηλαδή η ισοδυναμία $\varphi \Leftrightarrow \vartheta$ είναι πάντα αληθής). Μερικά ζεύγη λογικά ισοδύναμων τύπων:

(i) $\varphi, \quad \neg\neg\varphi$.

(ii) $\varphi \vee \vartheta, \quad \neg\,(\neg\varphi \wedge \neg\vartheta)$.

(iii) $\neg\,(\varphi \vee \vartheta), \quad \neg\varphi \wedge \neg\vartheta$.

(iv) $\neg\,(\varphi \wedge \vartheta), \quad \neg\varphi \vee \neg\vartheta$.

(v) $\varphi \Rightarrow \vartheta, \quad \neg\varphi \vee \vartheta$.

(vi) $\varphi \Rightarrow \vartheta, \quad \neg\vartheta \Rightarrow \neg\varphi$.

(vii) $\neg\,(\varphi \Rightarrow \vartheta), \quad \varphi \wedge \neg\vartheta$.

(viii) $\varphi \Leftrightarrow \vartheta, \quad (\varphi \Rightarrow \vartheta) \wedge (\vartheta \Rightarrow \varphi)$.

(ix) $\neg\forall x\varphi, \quad \exists x\neg\varphi$.

(x) $\neg\exists x\varphi, \quad \forall x\neg\varphi$.

Οι συλλογισμοί με τους οποίους αποδεικνύονται τα θεωρήματα των μαθηματικών χρησιμοποιούν διάφορους **κανόνες συμπερασμού**. Κάθε τέτοιος κανόνας εξασφαλίζει την ορθή εξαγωγή ενός συμπεράσματος ϑ από κάποιες υποθέσεις $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Αυτό συμβολικά γράφεται

$$\frac{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n}{\vartheta}$$

και σημαίνει ότι εφόσον είναι αληθείς οι τύποι $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, θα είναι αληθής και ο τύπος ϑ. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα κανόνων συμπερασμού:

(i) **Modus ponens**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \vartheta,\ \varphi}{\vartheta}\,.$$

(ii) **Modus tollens**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \vartheta,\ \neg\vartheta}{\neg\varphi}.$$

(iii) **Υποθετικός συλλογισμός**:

$$\frac{\varphi \Rightarrow \vartheta,\ \vartheta \Rightarrow \chi}{\varphi \Rightarrow \chi}.$$

(iv) **Διαζευκτικός συλλογισμός**:

$$\frac{\varphi \vee \vartheta,\ \neg\varphi}{\vartheta}.$$

1.3 Περισσότερα σύνολα

Ο λογικός συμβολισμός που εισαγάγαμε παραπάνω είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στη θεωρία συνόλων. Για παράδειγμα, έστω A ένα σύνολο και

$$\varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right)$$

μια συνθήκη (προτασιακός τύπος), όπου το "διάνυσμα" $\overrightarrow{p}$ συμβολίζει κάποια συγκεκριμένα αντικείμενα $p_1, \ldots, p_n$ (παράμετροι). Αντί για "κάθε στοιχείο x του A ικανοποιεί τη συνθήκη $\varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right)$", μπορούμε να γράψουμε

$$\forall x \left[x \in A \Rightarrow \varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right)\right]$$

ή

$$(\forall x \in A)\, \varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right).$$

Ομοίως, αντί για "υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο x του A το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη $\varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right)$", μπορούμε να γράψουμε

$$\exists x \left[x \in A \wedge \varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right)\right]$$

ή

$$(\exists x \in A)\, \varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right).$$

Όπως έχουμε ήδη συμφωνήσει, αν δύο σύνολα A και B έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε $A = B$. Συμβολικά αυτό γράφεται:

$$\forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B.$$

Το αντίστροφο είναι επίσης αληθές (προφανώς). Επομένως,

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)\,.$$

Συχνά για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε τη **μέθοδο της περιγραφής** (ή **ορίζουσας ιδιότητας**). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, το σύνολο όλων των x τα οποία ικανοποιούν τη συνθήκη $\varphi\left(x, \vec{p}\right)$ γράφεται

$$\left\{x \mid \varphi\left(x, \vec{p}\right)\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{x : \varphi\left(x, \vec{p}\right)\right\}.$$

Παραδείγματα:

(i) $\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ είναι ρητός αριθμός}\}$.

(ii) $\mathbb{R} = \{x : x \text{ είναι πραγματικός αριθμός}\}$.

(iii) $[0,1] = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 1\}$.

(iv) $\{a\} = \{x \mid x = a\}$.

(v) $\{a, b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\}$.

(vi) $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{x \mid \bigvee_{i=1}^{n} x = a_i\}$.

(vii) $A = \{x : x \in A\}$ για κάθε σύνολο A.

Αν σε κάθε στοιχείο i ενός συνόλου I αντιστοιχεί ένα αντικείμενο a_i, τότε το σύνολο όλων αυτών των αντικειμένων γράφεται

$$\{a_i \mid i \in I\}\,.$$

Τα στοιχεία του I λέγονται **δείκτες** και το I λέγεται **σύνολο δεικτών**. Για παράδειγμα,

$$\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

είναι το σύνολο των περιττών ακεραίων.

Ένα σύνολο μπορεί να είναι στοιχείο ενός άλλου συνόλου, π.χ. $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$. Αν όλα τα στοιχεία ενός συνόλου $\mathcal{F}$ είναι σύνολα, τότε το $\mathcal{F}$ λέγεται **οικογένεια συνόλων**.

Ένα σύνολο χωρίς στοιχεία, όπως το

$$\left\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 = 0\right\},$$

λέγεται **κενό σύνολο**.

Θεώρημα 1.5 *Αν K_1 και K_2 είναι κενά σύνολα, τότε $K_1 = K_2$.*

Απόδειξη Υποθέτοντας ότι τα K_1 και K_2 είναι κενά σύνολα, ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο αντικείμενο x_0 (του φυσικού κόσμου ή της νόησής μας). Οι τύποι $x_0 \in K_1$ και $x_0 \in K_2$ είναι ψευδείς (αφού τα K_1, K_2 δεν έχουν στοιχεία), οπότε η ισοδυναμία

$$x_0 \in K_1 \Leftrightarrow x_0 \in K_2$$

είναι αληθής. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι

$$\forall x \left(x \in K_1 \Leftrightarrow x \in K_2\right).$$

Συνεπώς $K_1 = K_2$. ■

Το κενό σύνολο (το οποίο είναι μοναδικό σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα) συμβολίζεται με $\varnothing$, δηλαδή

$$\varnothing := \{x \mid x \neq x\}.$$

Επομένως έχουμε:

(i) $\forall x \left(x \notin \varnothing\right)$.

(ii) Αν A είναι ένα σύνολο, τότε $A = \varnothing \Leftrightarrow \forall x \left(x \notin A\right)$.

Αν A, B είναι σύνολα και κάθε στοιχείο του A είναι επίσης στοιχείο του B, τότε λέμε ότι το A είναι **υποσύνολο** του B (ή ότι το B είναι **υπερσύνολο** του A) και γράφουμε

$$A \subseteq B \quad \text{ή} \quad B \supseteq A.$$

Δηλαδή,

$$A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \left(x \in A \Rightarrow x \in B\right).$$

Η σχέση $A \subseteq B$ λέγεται **εγκλεισμός** του A στο B. Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$, τότε λέμε ότι το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B (ή ότι το B είναι **γνήσιο υπερσύνολο** του A) και γράφουμε

$$A \subset B \quad \text{ή} \quad B \supset A.$$

Τέλος, ο συμβολισμός

$$A \nsubseteq B$$

σημαίνει $\neg\left(A \subseteq B\right)$.

Παρατήρηση 1.6 Όταν λέμε ότι ένα σύνολο B **περιέχει** ένα άλλο σύνολο A, μπορεί να εννοούμε είτε $A \in B$ είτε $A \subseteq B$, τα οποία είναι δύο εντελώς διαφορετικά πράγματα. Το νόημα μιας τέτοιας πρότασης είναι συνήθως σαφές από τα συμφραζόμενα.

Παρατήρηση 1.7 Αν A είναι ένα σύνολο, τότε μια οποιαδήποτε συνθήκη $\varphi\left(x, A, \vec{p}\right)$ καθορίζει ένα υποσύνολο $A_0 \subseteq A$ το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία $x \in A$ που ικανοποιούν την εν λόγω συνθήκη, δηλαδή

$$A_0 = \left\{x \mid x \in A \wedge \varphi\left(x, A, \vec{p}\right)\right\} = \left\{x \in A \mid \varphi\left(x, A, \vec{p}\right)\right\}.$$

Θεώρημα 1.8 *Για κάθε σύνολο A, έχουμε $\varnothing \subseteq A$.*

Απόδειξη Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο αντικείμενο x_0. Ο τύπος $x_0 \in \varnothing$ είναι ψευδής, οπότε η συνεπαγωγή

$$x_0 \in \varnothing \Rightarrow x_0 \in A$$

είναι αληθής (όποια και αν είναι η αληθοτιμή του τύπου $x_0 \in A$). Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι

$$\forall x \left(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A\right).$$

Επομένως $\varnothing \subseteq A$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ως εξής. Αν $\varnothing \nsubseteq A$, τότε υπάρχει κάποιο $x_0 \in \varnothing$ τέτοιο ώστε $x_0 \notin A$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού το $\varnothing$ δεν έχει στοιχεία. ■

Άσκηση 1.9 Εξηγείστε γιατί οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς:

(i) Όλες οι λύσεις της εξίσωσης $x^4 + 2 = x^4 + 3$ είναι ακέραιοι αριθμοί.

(ii) Όλοι οι άρτιοι διαιρέτες του 9 είναι πολλαπλάσια του 5.

(iii) Όλα τα στοιχεία του $\varnothing$ είναι σύνολα τα οποία περιέχουν τον αριθμό 13.

Θεώρημα 1.10 *Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C, έχουμε:*

(i) $A \subseteq A$.

(ii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C$.

(iii) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \;\Rightarrow\; A = B$.

Η σειρά με την οποία γράφονται τα στοιχεία a, b ενός ζεύγους δεν έχει σημασία, δηλαδή $\{a, b\} = \{b, a\}$. Αν όμως αναφερόμαστε στο **διατεταγμένο ζεύγος** $\langle a, b\rangle$, το οποίο μπορεί π.χ. να παριστάνει ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, η σειρά είναι σημαντική: $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$, εκτός και αν $a = b$.[2] Θα δούμε τώρα ότι υπάρχει τρόπος να ταυτίσουμε το $\langle a, b\rangle$ με κάποιο σύνολο έτσι ώστε η χαρακτηριστική ιδιότητα των διατεταγμένων ζευγών, δηλαδή

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \;\Leftrightarrow\; a = c \wedge b = d,$$

να μπορεί να αποδειχθεί. Θέτουμε

$$\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Τα a, b λέγονται **συντεταγμένες** του $\langle a, b\rangle$.

Θεώρημα 1.11 $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \;\Leftrightarrow\; a = c \wedge b = d$.

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο την κατεύθυνση $\Rightarrow$, αφού το αντίστροφο είναι προφανές. Έστω λοιπόν ότι $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$, δηλαδή

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: $a = b$. Τότε

$$\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $c = d = a$. Έτσι, $a = c$ και $b = d$.

Περίπτωση 2η: $c = d$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, είναι εύκολο να δούμε ότι $a = c$ και $b = d$.

Περίπτωση 3η: $a \neq b$ και $c \neq d$. Τότε

$$\{a\} = \{c\}, \quad \{a, b\} = \{c, d\},$$

από τις οποίες προκύπτει αμέσως ότι $a = c$ και $b = d$. ∎

[2] Το διατεταγμένο ζεύγος $\langle a, b\rangle$ συνήθως γράφεται (a, b). Αν όμως a, b είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a < b$, το "(a, b)" συμβολίζει επίσης το ανοικτό διάστημα με άκρα a και b. Άρα ο συμβολισμός "$\langle a, b\rangle$" είναι πιο ασφαλής.

Η έννοια του διατεταγμένου ζεύγους μπορεί εύκολα να επεκταθεί. Για $n \geq 3$, η **διατεταγμένη n-άδα** $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ με **συντεταγμένες** $a_1, \ldots, a_n$ ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle := \langle \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle .$$

Επίσης, χάριν πληρότητας, θέτουμε

$$\langle a \rangle := a.$$

Θεώρημα 1.12 *Για $n \geq 1$, έχουμε*

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \;\Leftrightarrow\; \bigwedge_{i=1}^{n} a_i = b_i .$$

Απόδειξη Με επαγωγή στο n. ■

Η **ένωση** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\},$$

το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία των A, B (κοινά και μη κοινά). Για παράδειγμα,

$$\{0, 1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, \} = \{0, 1, 2, 3, 4\} .$$

Θεώρημα 1.13 *Έχουμε:*

(i) $A \cup B = B \cup A$ *(**αντιμεταθετική ιδιότητα**).*

(ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(**προσεταιριστική ιδιότητα**).*

(iii) $A \cup A = A$ *(**ταυτοδυναμία**).*

(iv) $A \cup \varnothing = A$.

(v) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Θεώρημα 1.14 *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι σύνολα, τότε η ένωση*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

είναι ανεξάρτητη από παρενθέσεις.

Απόδειξη Θα χρησιμοποιήσουμε πλήρη επαγωγή. Για $n = 1, 2, 3$, το θεώρημα είναι προφανές. Τώρα, έστω $n > 3$ και ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για ενώσεις λιγότερων των n συνόλων. Με όποιον τρόπο και αν υπολογίσουμε την ένωση $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, το τελευταίο βήμα θα είναι ένας υπολογισμός της μορφής

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_r) \cup (A_{r+1} \cup \cdots \cup A_n) =: B_r,$$

όπου οι ενώσεις $A_1 \cup \cdots \cup A_r$ και $A_{r+1} \cup \cdots \cup A_n$ (που είναι ανεξάρτητες από παρενθέσεις, σύμφωνα με την υπόθεσή μας) έχουν ήδη υπολογιστεί. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$$B_1 = B_2 = \cdots = B_{n-1}.$$

Έστω $1 \leq r \leq n-2$. Αν θέσουμε

$$X = A_1 \cup \cdots \cup A_r, \quad Y = A_{r+1}, \quad Z = A_{r+2} \cup \cdots \cup A_n,$$

τότε

$$B_r = X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z = B_{r+1},$$

και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Θεώρημα 1.15 *Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι σύνολα, τότε η ένωση*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

είναι ανεξάρτητη από τη σειρά των A_i.

Η ένωση $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ εναλλακτικά γράφεται

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Έτσι,

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{ x \mid \bigvee_{i=1}^{n} x \in A_i \right\}.$$

Άσκηση 1.16 Δείξτε ότι $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \cdots \cup \{a_n\}$.

Η ένωση μιας οικογένειας συνόλων $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο

$$\bigcup \mathcal{F} := \{x \mid (\exists A \in \mathcal{F})\,(x \in A)\},$$

το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία των μελών της $\mathcal{F}$. Το σύνολο αυτό εναλλακτικά γράφεται

$$\bigcup \{A \mid A \in \mathcal{F}\} \quad \text{ή} \quad \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A.$$

Άσκηση 1.17 Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

(ii) $\bigcup \{A\} = A$ (όπου A σύνολο).

(iii) $\bigcup \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ (όπου $n \geq 2$ και τα A_i είναι σύνολα).

Η **τομή** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\},$$

το οποίο αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των A, B. Για παράδειγμα,

$$\{0, 1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}.$$

Θεώρημα 1.18 *Έχουμε:*

(i) $A \cap B = B \cap A$.

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(iii) $A \cap A = A$.

(iv) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(v) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Θεώρημα 1.19 *Ισχύουν οι παρακάτω* ***επιμεριστικοί νόμοι****:*

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Απόδειξη (i): Έστω ότι $x \in A \cap (B \cup C)$, δηλαδή $x \in A$ και $x \in B \cup C$. Αν $x \in B$, τότε $x \in A \cap B$ και άρα $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Αν $x \in C$, τότε $x \in A \cap C$ και άρα ξανά $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Δείξαμε λοιπόν ότι

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Με παρόμοιο τρόπο, έχουμε

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

(ii): Αφήνεται ως άσκηση. ■

Άσκηση 1.20 Αποδείξτε τους **νόμους απορρόφησης**:

(i) $A \cap (A \cup B) = A$.

(ii) $A \cup (A \cap B) = A$.

Η τομή n συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι το σύνολο

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{ x \mid \bigwedge_{i=1}^{n} x \in A_i \right\},$$

το οποίο αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των A_i. (Φυσικά, όπως και στην περίπτωση της ένωσης $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, η τομή $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ δεν εξαρτάται από παρενθέσεις ή από τη σειρά των A_i.)

Η τομή μιας μη κενής οικογένειας συνόλων $\mathcal{F}$ είναι το σύνολο

$$\bigcap \mathcal{F} := \{x \mid (\forall A \in \mathcal{F})\,(x \in A)\},$$

το οποίο αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των μελών της $\mathcal{F}$. Το σύνολο $\bigcap \mathcal{F}$ εναλλακτικά γράφεται

$$\bigcap \{A \mid A \in \mathcal{F}\} \quad \text{ή} \quad \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A.$$

Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου U. Είναι προφανές ότι

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \in U \mid (\exists A \in \mathcal{F})\,(x \in A)\}$$

και, εφόσον $\mathcal{F} \neq \varnothing$,

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \in U \mid (\forall A \in \mathcal{F})\,(x \in A)\}\,.$$

Αν $\mathcal{F} = \varnothing$, τότε

$$\{x \in U \mid (\forall A \in \mathcal{F})\,(x \in A)\} = U.$$

Γι' αυτό μερικές φορές κάνουμε την εξής παραδοχή:

> *Η τομή της κενής οικογένειας υποσυνόλων ενός δοθέντος συνόλου U είναι όλο το U.*

Άσκηση 1.21 Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\bigcap \{A\} = A$.

(ii) $\bigcap \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

Έστω $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ μια οικογένεια συνόλων με δείκτες. Τότε η ένωση $\bigcup \mathcal{F}$ και (όταν $I \neq \varnothing$) η τομή $\bigcap \mathcal{F}$ συνήθως συμβολίζονται με

$$\bigcup_{i \in I} A_i, \quad \bigcap_{i \in I} A_i,$$

ή πιο σύντομα

$$\bigcup_{i} A_i, \quad \bigcap_{i} A_i,$$

αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I)\,(x \in A_i)$$

και

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I)\,(x \in A_i)\,.$$

Αν $I = \mathbb{Z}^+$, τότε η ένωση και η τομή της $\mathcal{F}$ εναλλακτικά γράφονται

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Άσκηση 1.22 Έστω A ένα σύνολο και $\{B_i \mid i \in I\}$ μια μη κενή[3] οικογένεια συνόλων. Αποδείξτε τις παρακάτω γενικεύσεις των επιμεριστικών νόμων:

[3] Λέγοντας ότι η οικογένεια $\{B_i \mid i \in I\}$ είναι μη κενή, εννοούμε φυσικά ότι $I \neq \varnothing$.

(i) $A \cap \bigcup_i B_i = \bigcup_i (A \cap B_i)$.

(ii) $A \cup \bigcap_i B_i = \bigcap_i (A \cup B_i)$.

Άσκηση 1.23 Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 2\right] = (0, 2]$.

(ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$.

(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \varnothing$.

Δύο σύνολα A, B λέγονται **ξένα** αν

$$A \cap B = \varnothing.$$

Μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{F}$ λέγεται **ξένη ανά ζεύγη** ή απλά **ξένη** αν τα μέλη της είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, δηλαδή

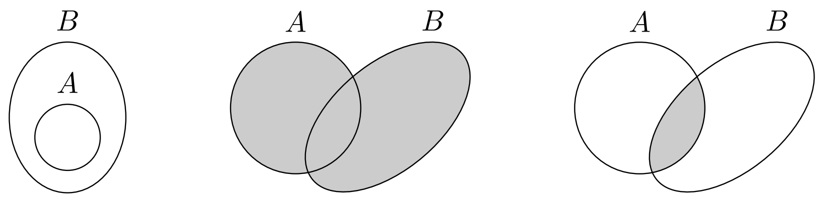
$$(\forall A, B \in \mathcal{F})\, (A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing)\,.$$

Στην περίπτωση μιας οικογένειας συνόλων με δείκτες, $\{A_i \mid i \in I\}$, λέγοντας ότι η οικογένεια είναι ξένη εννοούμε ότι

$$(\forall i, j \in I)\, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)\,.$$

Η ένωση μιας ξένης οικογένειας συνόλων λέγεται **ξένη ένωση**.

Μερικές φορές τα σύνολα παριστάνονται γραφικά σαν επίπεδα χωρία των οποίων τα σύνορα είναι κύκλοι ή άλλες απλές κλειστές γραμμές. Για παράδειγμα, ο εγκλεισμός, η ένωση και η τομή δύο συνόλων μπορούν να παρασταθούν ως εξής:



$A \subseteq B$ $\qquad$ $A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$

Τέτοιες παραστάσεις λέγονται **διαγράμματα Venn**.

Άσκηση 1.24 Δείξτε την ορθότητα του επιμεριστικού νόμου

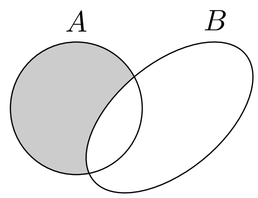
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα Venn.

Η **διαφορά** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο

$$A - B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\},$$

το οποίο παριστάνεται με το ακόλουθο διάγραμμα Venn:



Σε μερικά συγγράμματα αντί για $A - B$ χρησιμοποιείται ο εναλλακτικός συμβολισμός

$$A \setminus B.$$

Αν $B \subseteq A$, τότε λέμε ότι η διαφορά $A - B$ είναι **γνήσια**.

Θεώρημα 1.25 (νόμοι του De Morgan) *Έχουμε:*

(i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

(ii) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Απόδειξη (i): Έστω ότι $x \in A - (B \cup C)$, δηλαδή $x \in A$ αλλά $x \notin B$ και $x \notin C$. Τότε $x \in A - B$ και $x \in A - C$, δηλαδή $x \in (A - B) \cap (A - C)$. Δείξαμε λοιπόν ότι

$$A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cap (A - C).$$

Ομοίως,

$$(A - B) \cap (A - C) \subseteq A - (B \cup C).$$

(ii): Άσκηση. ■

Άσκηση 1.26 Έστω A ένα σύνολο και $\{B_i \mid i \in I\}$ μια μη κενή οικογένεια συνόλων. Αποδείξτε τις παρακάτω γενικεύσεις των νόμων του De Morgan:

(i) $A - \bigcup_i B_i = \bigcap_i (A - B_i)$.

(ii) $A - \bigcap_i B_i = \bigcup_i (A - B_i)$.

Άσκηση 1.27 Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

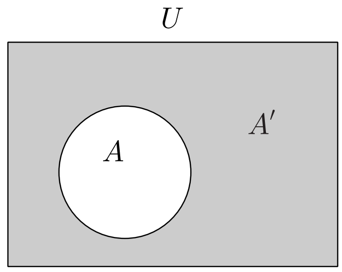
(i) $A - (A - B) = A \cap B$.

(ii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

Συχνά στα μαθηματικά εστιάζουμε την προσοχή μας στα στοιχεία και τα υποσύνολα ενός "βασικού συνόλου" U (το οποίο μπορεί να είναι π.χ. το σύνολο των μιγαδικών αριθμών). Αν $A \subseteq U$, τότε η διαφορά $U - A$ λέγεται **συμπλήρωμα** του A (ως προς το U) και συμβολίζεται με A', δηλαδή

$$A' := U - A.$$

Η επόμενη εικόνα δείχνει τα σύνολα U, A, A':



Άσκηση 1.28 Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες του συμπληρώματος, όπου όλα τα σύνολα που αναφέρονται είναι υποσύνολα ενός βασικού συνόλου U:

(i) $\varnothing' = U, \quad U' = \varnothing$.

(ii) $A \cup A' = U, \quad A \cap A' = \varnothing$.

(iii) $(A')' = A$.

(iv) $(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$.

(v) $(\bigcup_i A_i)' = \bigcap_i A_i', \quad (\bigcap_i A_i)' = \bigcup_i A_i'$.

(vi) $A - B = A \cap B'$.

(vii) $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$.

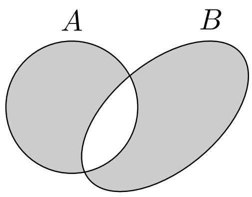
(viii) $A \subseteq B \Leftrightarrow A' \cup B = U$.

(ix) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B' = \varnothing$.

Η **συμμετρική διαφορά** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο

$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A),$$

το οποίο φαίνεται στην ακόλουθη εικόνα:



Θεώρημα 1.29 *Έχουμε:*

(i) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

(ii) $A \triangle B = B \triangle A$.

(iii) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Απόδειξη (i), (ii): Άσκηση.

(iii): Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A, B, C είναι υποσύνολα ενός συνόλου U. Έχουμε

$$\begin{aligned} A \triangle (B \triangle C) &= A \triangle \left[(B \cap C') \cup (C \cap B')\right] \\ = \Big\{A \cap \left[(B \cap C') \cup (C \cap B')\right]'\Big\} &\cup \left\{\left[(B \cap C') \cup (C \cap B')\right] \cap A'\right\} \\ &= P \cup Q, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} P &:= A \cap \left[(B \cap C') \cup (C \cap B')\right]' = A \cap (B \cap C')' \cap (C \cap B')' \\ &= A \cap (B' \cup C) \cap (C' \cup B) = A \cap \left\{\left[(B' \cup C) \cap C'\right] \cup \left[(B' \cup C) \cap B\right]\right\} \\ &= A \cap \left[(B' \cap C') \cup (B \cap C)\right] = (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

και

$$Q := \left[(B \cap C') \cup (C \cap B')\right] \cap A' = (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C).$$

Συνεπώς

$$A \triangle (B \triangle C) = \\ (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C).$$

Ομοίως, έχουμε

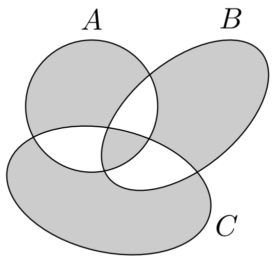
$$(A \triangle B) \triangle C = C \triangle (A \triangle B) = \\ (C \cap A \cap B) \cup (C \cap A' \cap B') \cup (C' \cap A \cap B') \cup (C' \cap A' \cap B).$$

Άρα

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

■

Παρατήρηση 1.30 Η ισότητα $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ καθίσταται προφανής αν χρησιμοποιήσουμε ένα διάγραμμα Venn:



Άσκηση 1.31 Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $A \triangle A = \varnothing$.

(ii) $A \triangle \varnothing = A$.

(iii) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

(iv) $A \cup B = A \triangle B \triangle (A \cap B)$.

Το **δυναμοσύνολο** $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου A είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A, δηλαδή

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}.$$

Παράδειγμα 1.32 Αν $A = \{1, 2, 3\}$, τότε

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Το **καρτεσιανό γινόμενο** δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο

$$A \times B := \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Το καρτεσιανό γινόμενο n συνόλων $A_1, \ldots, A_n$, όπου $n \geq 3$, ορίζεται αναδρομικά από τον τύπο

$$A_1 \times \cdots \times A_n := (A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n.$$

Επίσης, για $n \geq 1$, θέτουμε

$$A^n := \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ φορές}}.$$

Άσκηση 1.33 Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) $A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

(ii) $A_1 \times \cdots \times A_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_i \in A_i\}$.

(iii) $A^n = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_i \in A\}$.

1.4 Συναρτήσεις

Έστω f ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών το οποίο ικανοποιεί

$$\forall x \forall y \forall z\, (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \;\Rightarrow\; y = z).$$

Τότε το f λέγεται **συνάρτηση** ή **απεικόνιση**. Τα σύνολα

$$\mathrm{dom}\,(f) := \{x \mid \exists y\, (\langle x, y \rangle \in f)\},$$

$$\mathrm{ran}\,(f) := \{y \mid \exists x\, (\langle x, y \rangle \in f)\}$$

ονομάζονται **πεδίο ορισμού** και **πεδίο τιμών** της συνάρτησης f, αντιστοίχως. (Οι συμβολισμοί προέρχονται από τις λέξεις domain και range.) Για κάθε $x \in \mathrm{dom}\,(f)$, το μοναδικό y που ικανοποιεί $\langle x, y \rangle \in f$ συμβολίζεται με

$$f(x)$$

και ονομάζεται **τιμή** της f στο x ή **εικόνα** του x μέσω της f. Επίσης, μερικές φορές λέμε ότι η f **απεικονίζει** (ή **στέλνει** ή **μετασχηματίζει**) το x στο $f(x)$, και γράφουμε

$$x \mapsto f(x).$$

Είναι προφανές ότι
$$f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in \operatorname{dom}(f)\}$$
και
$$\operatorname{ran}(f) = \{f(x) \mid x \in \operatorname{dom}(f)\}.$$

Παρατήρηση 1.34 Σε πολλά συγγράμματα, ο όρος "συνάρτηση" ορίζεται ως μια διαδικασία f η οποία σε κάθε στοιχείο x ενός συνόλου $A = \operatorname{dom}(f)$ αντιστοιχίζει ένα αντικείμενο $f(x)$, το δε σύνολο $\{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in A\}$ λέγεται **γράφημα** της συνάρτησης f. Στο παρόν βιβλίο ταυτίζουμε κάθε συνάρτηση με το γράφημά της.

Παράδειγμα 1.35 Το κενό σύνολο είναι συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι το κενό σύνολο.

Παράδειγμα 1.36 Το σύνολο
$$f = \left\{\left\langle 0, \sqrt{7}\right\rangle, \left\langle 1, \sqrt{7}\right\rangle, \langle 2, -1\rangle, \langle 3, 0\rangle\right\}$$
είναι συνάρτηση με $\operatorname{dom}(f) = \{0,1,2,3\}$ και $\operatorname{ran}(f) = \left\{\sqrt{7}, -1, 0\right\}$. Επίσης, έχουμε:
$$f(0) = \sqrt{7}, \quad f(1) = \sqrt{7}, \quad f(2) = -1, \quad f(3) = 0.$$

Παράδειγμα 1.37 Το σύνολο
$$\{\langle 0, -5\rangle, \langle 0, 5\rangle, \langle 4, 1\rangle\}$$
δεν είναι συνάρτηση.

Παράδειγμα 1.38 Το σύνολο
$$g = \{\langle k, 3\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
είναι συνάρτηση με $\operatorname{dom}(g) = \mathbb{Z}$ και $\operatorname{ran}(g) = \{3\}$. Η g απεικονίζει όλα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού της στο ίδιο αντικείμενο (δηλαδή τον αριθμό 3). Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **σταθερή συνάρτηση**.

Παράδειγμα 1.39 Το σύνολο
$$h = \left\{\left\langle x, x^2\right\rangle \mid x \in \mathbb{R}\right\}$$
είναι συνάρτηση με $\operatorname{dom}(h) = \mathbb{R}$ και $\operatorname{ran}(h) = [0, +\infty)$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε
$$h(x) = x^2.$$

Έστω f, g δύο συναρτήσεις. Αν $f \subseteq g$, τότε η f λέγεται **περιορισμός** της g και η g λέγεται **επέκταση** της f. Αν

$$[\forall x \in \mathrm{dom}\,(f) \cap \mathrm{dom}\,(g)]\,[f\,(x) = g\,(x)]\,,$$

τότε οι f, g λέγονται **συμβατές συναρτήσεις**.

Άσκηση 1.40 Έστω f, g δύο συναρτήσεις. Αποδείξτε τις ακόλουθες ισοδυναμίες:

(i) $f \subseteq g \;\Leftrightarrow\; \mathrm{dom}\,(f) \subseteq \mathrm{dom}\,(g) \wedge [\forall x \in \mathrm{dom}\,(f)]\,[f\,(x) = g\,(x)]$.

(ii) $f = g \;\Leftrightarrow\; \mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{dom}\,(g) \wedge [\forall x \in \mathrm{dom}\,(f)]\,[f\,(x) = g\,(x)]$.

Άσκηση 1.41 Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συναρτήσεων οι οποίες ανά δύο είναι συμβατές. Δείξτε ότι η ένωση $\bigcup \mathcal{F}$ είναι συνάρτηση με

$$\mathrm{dom}\left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}\,(f)$$

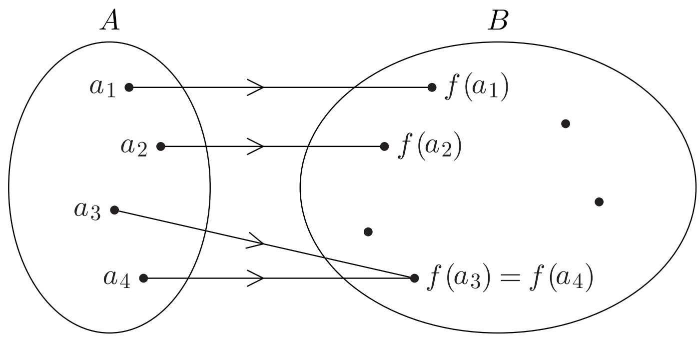
και

$$\mathrm{ran}\left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{ran}\,(f)\,.$$

Έστω A, B δύο σύνολα και f μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\mathrm{dom}\,(f) = A$ και $\mathrm{ran}\,(f) \subseteq B$. Τότε γράφουμε

$$f : A \longrightarrow B \quad \text{ή} \quad A \xrightarrow{\;f\;} B$$

και λέμε ότι η f είναι **συνάρτηση από το A στο B**. Η παρακάτω εικόνα δείχνει μια τέτοια συνάρτηση:



Για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B, το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B συμβολίζεται με ${}^{A}B$, δηλαδή

$${}^{A}B := \{f \mid f : A \longrightarrow B\}.$$

Εναλλακτικός συμβολισμός (τη χρήση του οποίου θα αποφύγουμε στο παρόν βιβλίο):

$$B^{A}.$$

Άσκηση 1.42 Έστω A, B δύο σύνολα. Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) ${}^{A}B \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$.

(ii) ${}^{\varnothing}B = \{\varnothing\}$.

(iii) $A \neq \varnothing \Rightarrow {}^{A}\varnothing = \varnothing$.

Έστω f μια συνάρτηση τέτοια ώστε κάθε δύο διαφορετικά στοιχεία του $\operatorname{dom}(f)$ έχουν διαφορετικές εικόνες μέσω της f, δηλαδή

$$[\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(f)]\,[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

ή ισοδύναμα

$$[\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(f)]\,[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2].$$

Τότε η f λέγεται **ένα προς ένα** (συμβολικά: $\mathbf{1-1}$) ή **ενριπτική συνάρτηση** ή **ένριψη**.

Παράδειγμα 1.43 Η συνάρτηση $\left\{\left\langle x, x^3\right\rangle \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ είναι $1-1$, ενώ η συνάρτηση $\left\{\left\langle x, x^2\right\rangle \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ δεν είναι $1-1$.

Έστω $f : A \longrightarrow B$. Αν

$$(\forall y \in B)\,(\exists x \in A)\,[f(x) = y]$$

ή ισοδύναμα

$$\operatorname{ran}(f) = B,$$

τότε η f λέγεται **επί** (ακριβέστερα: **επί του** B) ή **επιρριπτική συνάρτηση** ή **επίρριψη**. Αν η f είναι ταυτοχρόνως ενριπτική και επιρριπτική, τότε η f λέγεται **αμφιρριπτική συνάρτηση** ή **αμφίρριψη**.

Παράδειγμα 1.44 Η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \longrightarrow [3, +\infty)$ που ορίζεται από τον τύπο $f(x) = 2x + 1$ είναι αμφιρριπτική.

Έστω A ένα σύνολο. Η **ταυτοτική συνάρτηση** πάνω στο A είναι η συνάρτηση $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ με

$$\mathrm{id}_A(x) := x$$

για κάθε $x \in A$, ή ισοδύναμα

$$\mathrm{id}_A := \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}.$$

[Γενικά, όταν λέμε "συνάρτηση **πάνω** σε ένα σύνολο A" εννοούμε μια συνάρτηση f με $\mathrm{dom}(f) = A$.]

Αν η f είναι συνάρτηση και $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, τότε ο **περιορισμός της f στο** A είναι η συνάρτηση

$$f{\restriction}A := f \cap [A \times \mathrm{ran}(f)] = \{\langle x, y\rangle \in f \mid x \in A\},$$

η οποία εναλλακτικά συμβολίζεται με

$$f|A \quad \text{ή} \quad f|_A.$$

Αν $A \subseteq B$, τότε ο περιορισμός της $\mathrm{id}_B : B \longrightarrow B$ στο A ονομάζεται **συνάρτηση εγκλεισμού** ή **ενθετική συνάρτηση** του A μέσα στο B, και ενίοτε γράφεται

$$i : A \hookrightarrow B.$$

Έστω $f : A \longrightarrow B$. Αν $C \subseteq A$, τότε η **εικόνα** του C μέσω της f είναι το σύνολο

$$f[C] := \mathrm{ran}(f{\restriction}C) = \{f(x) \mid x \in C\}.$$

Αν $D \subseteq B$, τότε η **αντίστροφη εικόνα** του D μέσω της f είναι το σύνολο

$$f^{-1}[D] := \{x \in A \mid f(x) \in D\}.$$

Τα σύνολα $f[C], f^{-1}[D]$ συχνά γράφονται και ως

$$f(C), \quad f^{-1}(D),$$

αντιστοίχως. Αυτό όμως μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση, αφού π.χ. είναι δυνατό να έχουμε ταυτοχρόνως $C \subseteq A$ και $C \in A$.

Άσκηση 1.45 Έστω $f : A \longrightarrow B$. Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $\{C_i \mid i \in I\}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του A, τότε

$$f\left[\bigcup_i C_i\right] = \bigcup_i f\left[C_i\right], \quad f\left[\bigcap_i C_i\right] \subseteq \bigcap_i f\left[C_i\right].$$

(ii) Αν $C_1, C_2 \subseteq A$, τότε

$$f\left[C_1 - C_2\right] \supseteq f\left[C_1\right] - f\left[C_2\right].$$

(iii) Αν $\{D_i \mid i \in I\}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του B, τότε

$$f^{-1}\left[\bigcup_i D_i\right] = \bigcup_i f^{-1}\left[D_i\right], \quad f^{-1}\left[\bigcap_i D_i\right] = \bigcap_i f^{-1}\left[D_i\right].$$

(iv) Αν $D_1, D_2 \subseteq B$, τότε

$$f^{-1}\left[D_1 - D_2\right] = f^{-1}\left[D_1\right] - f^{-1}\left[D_2\right].$$

Άσκηση 1.46 Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2$, και έστω $A = [-1, 2]$, $B = [-2, 1]$. Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$.

(ii) $f[A - B] \supset f[A] - f[B]$.

Μια συνάρτηση $f : A^n \longrightarrow A$ λέγεται n-**μελής πράξη** (πάνω) στο A. (Συνήθως αντί για 1-μελής λέμε **μονομελής**, αντί για 2-μελής λέμε **διμελής**, κτλ.) Για κάθε $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in A^n$, η τιμή $f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$ της f στο $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ πιο απλά γράφεται

$$f(x_1, \ldots, x_n).$$

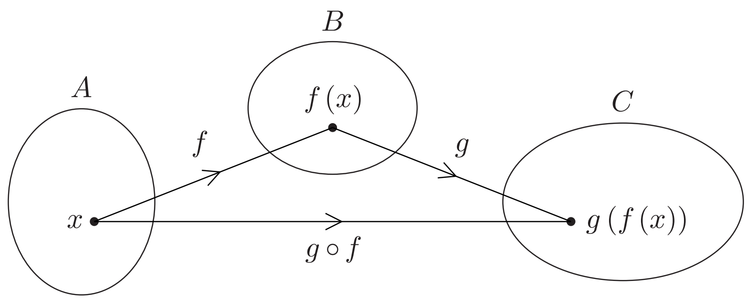
Ένα υποσύνολο $B \subseteq A$ είναι **κλειστό** ως προς την f αν $f[B^n] \subseteq B$. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή το B "κληρονομεί" την πράξη f από το A, δηλαδή ο περιορισμός $f{\restriction}B^n$ είναι μια n-μελής πράξη στο B.

Παράδειγμα 1.47 Η πρόσθεση πραγματικών αριθμών είναι η διμελής πράξη $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $\alpha(x, y) = x + y$. Το $\mathbb{Q}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, ενώ το $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ δεν είναι.

Η **σύνθεση** δύο συναρτήσεων $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow C$ είναι η συνάρτηση $g \circ f : A \longrightarrow C$ με

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

για κάθε $x \in A$.



Ισοδύναμα, η $g \circ f$ μπορεί να ορισθεί ως

$$g \circ f := \{\langle x, z\rangle \mid \exists y\,(\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, z\rangle \in g)\}.$$

Μερικές φορές παραλείπουμε το $\circ$ και γράφουμε gf αντί για $g \circ f$.

Παράδειγμα 1.48 Αν οι $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ορίζονται από τους τύπους

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad g(x) = 3x + 2,$$

τότε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{3x}{x^2+1} + 2 = \frac{2x^2+3x+2}{x^2+1}$$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = \frac{3x+2}{(3x+2)^2+1} = \frac{3x+2}{9x^2+12x+5}.$$

Θεώρημα 1.49 *Η σύνθεση συναρτήσεων είναι προσεταιριστική. Με άλλα λόγια, αν $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ και $h : C \longrightarrow D$, τότε*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Πιο γενικά, αν $n \geq 3$ και $f_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ για $k = 1, 2, \ldots, n$, τότε η σύνθετη συνάρτηση

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1 : A_1 \longrightarrow A_{n+1}$$

δεν εξαρτάται από παρενθέσεις.

Απόδειξη Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι οι $h \circ (g \circ f)$ και $(h \circ g) \circ f$ είναι συναρτήσεις από το A στο D. Τώρα, έστω $x \in A$. Έχουμε

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

και

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

οπότε

$$[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x).$$

Η απόδειξη της γενίκευσης αφήνεται ως άσκηση. ∎

Θεώρημα 1.50 *Η σύνθεση δύο ή περισσότερων ενριπτικών (αντ. επιρριπτικών, αμφιρριπτικών) συναρτήσεων είναι συνάρτηση ενριπτική (αντ. επιρριπτική, αμφιρριπτική).*

Απόδειξη Αν οι συναρτήσεις $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow C$ είναι ενριπτικές, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\underset{g\ \text{ενριπτ.}}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \underset{f\ \text{ενριπτ.}}{\Rightarrow} x_1 = x_2,\end{aligned}$$

και άρα η $g \circ f$ είναι ενριπτική.

Τώρα, έστω ότι οι $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow C$ είναι επιρριπτικές. Θεωρούμε ένα τυχαίο $z \in C$. Επειδή η g είναι επιρριπτική, υπάρχει ένα $y \in B$ τέτοιο ώστε $g(y) = z$. Επίσης, επειδή η f είναι επιρριπτική, υπάρχει ένα $x \in A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Έτσι,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Αυτό δείχνει ότι η $g \circ f$ είναι επιρριπτική. ∎

Θεώρημα 1.51 *Αν $f : A \longrightarrow B$, τότε $f \circ \mathrm{id}_A = f$ και $\mathrm{id}_B \circ f = f$.*

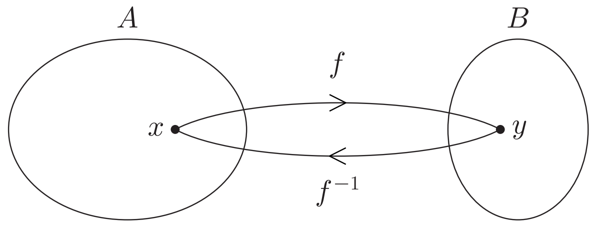
Άσκηση 1.52 Δείξτε ότι αν οι $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow A$ ικανοποιούν $g \circ f = \mathrm{id}_A$, τότε η f είναι ενριπτική και η g είναι επιρριπτική.

Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια αμφιρριπτική συνάρτηση. Η **αντίστροφη** της f είναι η συνάρτηση $f^{-1} : B \longrightarrow A$ που ορίζεται από την ισότητα

$$f^{-1} := \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f\}.$$

Έτσι, για κάθε $x \in A$ και $y \in B$, έχουμε

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$



Παράδειγμα 1.53 Αν η $f : [0, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$ ορίζεται από τον τύπο $f(x) = 9x^2 + 1$, τότε η f είναι αμφιρριπτική και $f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{y-1}}{3}$ για κάθε $y \in [1, +\infty)$.

Θεώρημα 1.54 *Για κάθε σύνολο A, η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id}_A : A \longrightarrow A$ είναι αμφιρριπτική και $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.*

Θεώρημα 1.55 *Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια αμφιρριπτική συνάρτηση. Τότε:*

(i) *Η $f^{-1} : B \longrightarrow A$ είναι αμφιρριπτική.*

(ii) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.

(iii) $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Άσκηση 1.56 Αν για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geq 2)$ η $f_k : A_k \longrightarrow A_{k+1}$ είναι μια αμφιρριπτική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

Άσκηση 1.57 Δείξτε ότι αν οι $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow A$, $h : B \longrightarrow A$ ικανοποιούν $g \circ f = \mathrm{id}_A$ και $f \circ h = \mathrm{id}_B$, τότε η f είναι αμφιρριπτική και $g = h = f^{-1}$.

Άσκηση 1.58 Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια αμφιρριπτική συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $Y \subseteq B$, οι δύο πιθανές ερμηνείες του συμβόλου $f^{-1}[Y]$ (δηλαδή, η αντίστροφη εικόνα του Y μέσω της f και η εικόνα του Y μέσω της f^{-1}) ταυτίζονται.

Έστω a μια συνάρτηση πάνω σε ένα σύνολο I. Θέτοντας

$$a_i := a(i)$$

για κάθε $i \in I$, είναι μερικές φορές βολικό να συμβολίσουμε την a με $\langle a_i \mid i \in I \rangle$ ή $\langle a_i \rangle_{i \in I}$, δηλαδή

$$a = \langle a_i \mid i \in I \rangle = \langle a_i \rangle_{i \in I}.$$

Το a_i λέγεται **i-οστή συντεταγμένη** της a. Παρατηρούμε ότι

$$\{a_i \mid i \in I\} = \operatorname{ran}(a).$$

Τώρα, έστω $\{A_i \mid i \in I\}$ μια οικογένεια συνόλων. Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο συμβολισμό, ορίζουμε το **καρτεσιανό γινόμενο** $\prod_{i\in I} A_i$ της εν λόγω οικογένειας ως το σύνολο όλων των συναρτήσεων $a = \langle a_i \rangle_{i\in I}$ (πάνω στο I) οι οποίες ικανοποιούν $a_i \in A_i$ για κάθε $i \in I$, δηλαδή

$$\prod_{i\in I} A_i := \left\{ \langle a_i \rangle_{i\in I} \mid (\forall i \in I)(a_i \in A_i) \right\}.$$

Για κάθε $j \in I$, το σύνολο A_j λέγεται **j-οστή συνιστώσα** του $\prod_{i\in I} A_i$, και η συνάρτηση $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \longrightarrow A_j$ με

$$\pi_j(a) := a_j$$

λέγεται **προβολή** του καρτεσιανού γινομένου στην j-οστή συνιστώσα (ή **j-οστή προβολή**). Αν όλα τα A_i είναι το ίδιο σύνολο A, τότε προφανώς

$$\prod_{i\in I} A_i = {}^I A.$$

Παρατήρηση 1.59 Στην περίπτωση που το σύνολο I των δεικτών είναι πεπερασμένο, ο ορισμός που μόλις δώσαμε διαφέρει από τον παλαιότερο ορισμό του καρτεσιανού γινομένου. Ωστόσο, αν και διαφορετικά, τα δύο αυτά είδη πεπερασμένου καρτεσιανού γινομένου είναι κατά μία προφανή έννοια ισοδύναμα. Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιούμε τον αρχικό ορισμό για πεπερασμένα γινόμενα, και τον παραπάνω ορισμό για άπειρα (ή για τυχαία) γινόμενα. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για ένα καρτεσιανό γινόμενο φανερώνει το είδος του γινομένου.

1.5 Σχέσεις

Ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών λέγεται **σχέση**. Ισοδύναμα, ένα σύνολο R είναι σχέση αν και μόνον αν το R είναι υποσύνολο ενός καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων. Κάθε συνάρτηση είναι σχέση, αλλά προφανώς υπάρχουν σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις.

Έστω A ένα σύνολο. Ένα υποσύνολο του A^n λέγεται **n-μελής σχέση** (πάνω) στο A. Έτσι, μονομελής σχέση στο A είναι απλώς ένα υποσύνολο του

A, διμελής σχέση στο A είναι ένα υποσύνολο του A^2, κτλ. (Προσοχή: Μια μονομελής σχέση στο A μπορεί να μην είναι σύνολο διατεταγμένων ζευγών.) Αν R είναι μια n-μελής σχέση στο A, τότε αντί για $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R$ συνήθως γράφουμε

$$R\,(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Στην περίπτωση που η R είναι διμελής, αντί για $\langle x, y \rangle \in R$ και $\langle x, y \rangle \notin R$ γράφουμε

$$x\,R\,y, \quad x \not R\, y,$$

αντιστοίχως.

Αν R είναι μια n-μελής σχέση στο A, τότε ο **περιορισμός** της R σε ένα υποσύνολο $B \subseteq A$ είναι η n-μελής σχέση

$$R_B := R \cap B^n$$

πάνω στο B. Για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in B$, έχουμε

$$R_B\,(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow R\,(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Έστω R μια διμελής σχέση πάνω σε ένα σύνολο A. Δίνουμε τους εξής ορισμούς:

- Η R είναι **ανακλαστική** αν $(\forall x \in A)\,(x\,R\,x)$.
- Η R είναι **αντιανακλαστική** αν $(\forall x \in A)\,\big(x \not R\, x\big)$.
- Η R είναι **συμμετρική** αν $(\forall x, y \in A)\,(x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x)$.
- Η R είναι **ασυμμετρική** αν $(\forall x, y \in A)\,\big(x\,R\,y \Rightarrow y \not R\, x\big)$.
- Η R είναι **αντισυμμετρική** αν $(\forall x, y \in A)\,(x\,R\,y \wedge y\,R\,x \;\Rightarrow\; x = y)$.
- Η R είναι **μεταβατική** αν $(\forall x, y, z \in A)\,(x\,R\,y \wedge y\,R\,z \;\Rightarrow\; x\,R\,z)$.
- Η R είναι **συνεκτική** αν $(\forall x, y \in A)\,(x \neq y \;\Rightarrow\; x\,R\,y \vee y\,R\,x)$.
- Η R είναι **ισχυρά συνεκτική** αν $(\forall x, y \in A)\,(x\,R\,y \vee y\,R\,x)$.

Παράδειγμα 1.60 Έστω A ένα σύνολο. Η σχέση $=_A$ που ορίζεται από την ισότητα

$$=_A \;:= \big\{\langle x, y \rangle \in A^2 \mid x = y\big\}$$

λέγεται **ταυτοτική σχέση** ή **διαγώνιος σχέση** πάνω στο A. (Προφανώς $=_A$ και id_A είναι το ίδιο πράγμα, αλλά η $=_A$ μας ενδιαφέρει απλώς ως διμελής σχέση πάνω στο A.) Για κάθε $x, y \in A$, έχουμε

$$x =_A y \;\Leftrightarrow\; x = y.$$

Η $=_A$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

Παράδειγμα 1.61 Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συνόλων. Οι διμελείς σχέσεις $\subseteq_{\mathcal{F}}$ και $\subset_{\mathcal{F}}$ πάνω στην $\mathcal{F}$ ορίζονται από τις ισότητες

$$\subseteq_{\mathcal{F}} := \left\{ \langle X, Y \rangle \in \mathcal{F}^2 \mid X \subseteq Y \right\},$$

$$\subset_{\mathcal{F}} := \left\{ \langle X, Y \rangle \in \mathcal{F}^2 \mid X \subset Y \right\}.$$

Για κάθε $X, Y \in \mathcal{F}$, έχουμε

$$X \subseteq_{\mathcal{F}} Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$$

και

$$X \subset_{\mathcal{F}} Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

Η σχέση $\subseteq_{\mathcal{F}}$ είναι ανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική. Η σχέση $\subset_{\mathcal{F}}$ είναι αντιανακλαστική, μεταβατική και ασυμμετρική.

Παράδειγμα 1.62 Η σχέση $<$ πάνω στο $\mathbb{R}$ είναι συνεκτική αλλά όχι ισχυρά συνεκτική. Από την άλλη μεριά, η σχέση $\leq$ (πάλι πάνω στο $\mathbb{R}$) είναι ισχυρά συνεκτική.

Άσκηση 1.63 Δείξτε ότι μια διμελής σχέση R πάνω σε ένα σύνολο A είναι ασυμμετρική αν και μόνον αν η R είναι αντιανακλαστική και αντισυμμετρική.

Άσκηση 1.64 Έστω R μια διμελής μεταβατική σχέση πάνω σε ένα σύνολο A. Δείξτε ότι η R είναι ασυμμετρική αν και μόνον αν είναι αντιανακλαστική.

Έστω A ένα σύνολο και $\equiv$ μια διμελής σχέση πάνω στο A η οποία είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική· δηλαδή για κάθε $x, y, z \in A$,

$$x \equiv x,$$

$$x \equiv y \Rightarrow y \equiv x,$$

$$x \equiv y \wedge y \equiv z \;\Rightarrow\; x \equiv z.$$

Τότε η $\equiv$ λέγεται **σχέση ισοδυναμίας**. Για κάθε $x \in A$, η **κλάση ισοδυναμίας** του x ως προς την $\equiv$ είναι το σύνολο

$$[x] := \{y \in A \mid y \equiv x\},$$

και κάθε $y \in [x]$ λέγεται **εκπρόσωπος** της κλάσης $[x]$. Αν χρειαζόμαστε ακριβέστερο συμβολισμό, τότε αντί για $[x]$ γράφουμε

$$[x]_{\equiv} \quad \text{ή} \quad x/\equiv .$$

Η οικογένεια

$$A/\equiv \; := \{[x] \mid x \in A\}$$

όλων των κλάσεων ισοδυναμίας ονομάζεται **σύνολο πηλίκο** του A διά της $\equiv$. Η **προβολή** του A επί του $A/\equiv$ είναι η επίρριψη $\pi : A \longrightarrow A/\equiv$ που ορίζεται από τον τύπο

$$\pi(x) := [x].$$

Παράδειγμα 1.65 Έστω A ένα τυχαίο σύνολο. Η ταυτοτική σχέση $=_A$ είναι σχέση ισοδυναμίας πάνω στο A και

$$[x] = \{x\}$$

για κάθε $x \in A$.

Παράδειγμα 1.66 Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$x \equiv y :\Leftrightarrow |x| = |y|.$$

Τότε η $\equiv$ είναι σχέση ισοδυναμίας πάνω στο $\mathbb{R}$ και

$$[x] = \{x, -x\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.67 Για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}$, θέτουμε

$$x \equiv y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Τότε η $\equiv$ είναι σχέση ισοδυναμίας πάνω στο $\mathbb{Q}$ και

$$[x] = \{x + k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{Q}$.

Παράδειγμα 1.68 Έστω n ένας σταθερός θετικός ακέραιος. Δύο ακέραιοι a και b λέγονται **ισότιμοι modulo** n, συμβολικά

$$a \equiv b \pmod{n},$$

αν ο n διαιρεί τη διαφορά $a-b$ (ή ισοδύναμα, οι a και b αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο στην ευκλείδεια διαίρεση διά του n). Αυτό ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στο $\mathbb{Z}$. Η κλάση ισοδυναμίας ενός ακεραίου a ως προς την ισοτιμία modulo n συμβολίζεται με $[a]_n$, δηλαδή

$$[a]_n := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{n}\} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Η $[a]_n$ λέγεται **κλάση καταλοίπου** a (ή **κλάση ισοτιμίας** του a) modulo n. Αν δεν υπάρχει φόβος σύγχυσης, τότε αντί για $[a]_n$ γράφουμε $[a]$. Το σύνολο πηλίκο του $\mathbb{Z}$ διά της ισοτιμίας modulo n συμβολίζεται με $\mathbb{Z}_n$, δηλαδή

$$\mathbb{Z}_n := \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}.$$

Θεώρημα 1.69 *Έστω $\equiv$ μια σχέση ισοδυναμίας πάνω σε ένα σύνολο A. Τότε για κάθε $x, y \in A$, έχουμε:*

(i) $x \in [x]$.

(ii) $[x] = [y] \Leftrightarrow x \equiv y$.

(iii) $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \varnothing$.

Έστω A ένα σύνολο. Αν $\mathcal{F}$ είναι μια ξένη οικογένεια μη κενών υποσυνόλων του A τέτοια ώστε $\bigcup \mathcal{F} = A$, τότε η $\mathcal{F}$ λέγεται **διαμέριση** του A.

Θεώρημα 1.70 *Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας πάνω σε ένα σύνολο A, τότε το σύνολο πηλίκο $A/\equiv$ είναι μια διαμέριση του A.*

Έστω $\mathcal{F}$ μια διαμέριση ενός συνόλου A. Ορίζουμε μια διμελή σχέση $A/\mathcal{F}$ πάνω στο A θέτοντας, για κάθε $x, y \in A$,

$$x \; A/\mathcal{F} \; y \;:\Leftrightarrow\; (\exists X \in \mathcal{F})\,(x \in X \wedge y \in X).$$

Θεώρημα 1.71 *Αν $\mathcal{F}$ είναι μια διαμέριση ενός συνόλου A, τότε η $A/\mathcal{F}$ είναι σχέση ισοδυναμίας πάνω στο A.*

Άσκηση 1.72 Έστω A ένα σύνολο. Δείξτε ότι:

(i) Αν $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στο A, τότε $A/(A/\equiv) = \equiv$.

(ii) Αν $\mathcal{F}$ είναι μια διαμέριση του A, τότε $A/(A/\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Μια διμελής σχέση $\leq$ πάνω σε ένα σύνολο A λέγεται **μερική διάταξη** του A αν η $\leq$ είναι ανακλαστική, μεταβατική και αντισυμμετρική· δηλαδή για κάθε $x, y, z \in A$,

$$x \leq x,$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z,$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \;\Rightarrow\; x = y.$$

Στην περίπτωση αυτή, το διατεταγμένο ζεύγος $\langle A, \leq \rangle$ (ή απλά το A) λέγεται **μερικώς διατεταγμένο σύνολο**.

Αν $\leq$ είναι μια μερική διάταξη του A η οποία επιπλέον είναι και ισχυρά συνεκτική, δηλαδή για κάθε $x, y \in A$ έχουμε

$$x \leq y \vee y \leq x,$$

τότε η $\leq$ λέγεται **ολική διάταξη** (ή **γραμμική διάταξη** ή **απλή διάταξη**) του A και το διατεταγμένο ζεύγος $\langle A, \leq \rangle$ (ή απλά το A) λέγεται **ολικώς διατεταγμένο σύνολο**.

Παράδειγμα 1.73 Για οποιαδήποτε οικογένεια συνόλων $\mathcal{F}$, η σχέση $\subseteq_{\mathcal{F}}$ (δείτε Παράδειγμα 1.61) είναι μια μερική διάταξη της $\mathcal{F}$. Αν $\mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$ για κάποιο σύνολο A με τουλάχιστον δύο (διαφορετικά) στοιχεία, τότε η $\subseteq_{\mathcal{F}}$ δεν είναι ολική διάταξη.

Παράδειγμα 1.74 Η συνήθης διάταξη $\leq$ του $\mathbb{R}$ είναι μια ολική διάταξη.

Παρατήρηση 1.75 Αν $\langle A, \leq \rangle$ είναι ένα μερικώς (αντ. ολικώς) διατεταγμένο σύνολο και $B \subseteq A$, τότε ο περιορισμός της $\leq$ στο B (που και αυτός συνήθως συμβολίζεται με $\leq$) είναι μια μερική (αντ. ολική) διάταξη του B, και έτσι το $\langle B, \leq \rangle$ είναι ένα μερικώς (αντ. ολικώς) διατεταγμένο σύνολο.

Άσκηση 1.76 Έστω A ένα σύνολο και $\leq$ μια μερική διάταξη του A. Για κάθε $x, y \in A$, θέτουμε

$$x < y \;:\Leftrightarrow\; x \leq y \wedge x \neq y.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Η $<$ είναι αντιανακλαστική και μεταβατική· δηλαδή για κάθε $x, y, z \in A$, έχουμε:

$$x \not< x,$$

$$x < y \wedge y < z \;\Rightarrow\; x < z.$$

(ii) Αν η $\leq$ είναι ολική διάταξη, τότε η $<$ είναι επιπλέον και συνεκτική, δηλαδή για κάθε $x, y \in A$ ισχύει

$$x \neq y \;\Rightarrow\; x < y \vee y < x.$$

Άσκηση 1.77 Έστω A ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια διμελή σχέση $<$ η οποία είναι αντιανακλαστική και μεταβατική. Για κάθε $x, y \in A$, θέτουμε

$$x \leq y \;:\Leftrightarrow\; x < y \vee x = y.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Η $\leq$ είναι μερική διάταξη του A.

(ii) Αν η $<$ είναι επιπλέον και συνεκτική, τότε η $\leq$ είναι ολική διάταξη του A.

Έστω A ένα σύνολο. Σύμφωνα με τις δύο τελευταίες ασκήσεις, δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ μιας μερικής διάταξης $\leq$ του A και μιας διμελούς σχέσης $<$ πάνω στο A η οποία είναι αντιανακλαστική και μεταβατική. Καθένα από τα δύο αυτά είδη σχέσεων προκύπτει αυτομάτως από το άλλο, και στο εξής με τον όρο "μερική διάταξη" θα εννοούμε οποιοδήποτε εκ των δύο ειδών. Ομοίως, ο όρος "ολική διάταξη" θα σημαίνει επίσης μια σχέση $<$ η οποία είναι αντιανακλαστική, μεταβατική και συνεκτική. Αν θέλουμε να διακρίνουμε τις σχέσεις $\leq$ και $<$ από άποψη ορολογίας, τότε αναφερόμαστε στη δεύτερη σχέση ως **αυστηρή διάταξη**. Τέλος, οι συμβολισμοί

$$y \geq x, \quad y > x$$

σημαίνουν $x \leq y$ και $x < y$, αντιστοίχως.

Άσκηση 1.78 Έστω A ένα σύνολο και $\preceq$ μια διμελής σχέση πάνω στο A η οποία είναι ανακλαστική και μεταβατική. (Μια τέτοια σχέση λέγεται **προδιάταξη** του A.) Για κάθε $x, y \in A$, θέτουμε

$$x \equiv y \;:\Leftrightarrow\; x \preceq y \wedge y \preceq x.$$

Δείξτε ότι η $\equiv$ είναι σχέση ισοδυναμίας πάνω στο A. Στη συνέχεια ορίζουμε μια διμελή σχέση $\leq$ πάνω στο σύνολο πηλίκο $A/\!\equiv$, θέτοντας

$$[x] \leq [y] :\Leftrightarrow x \preceq y.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Ο ορισμός της $\leq$ δεν εξαρτάται από την επιλογή εκπροσώπων των κλάσεων $[x]$ και $[y]$. Με άλλα λόγια, αν $x' \equiv x$ και $y' \equiv y$, τότε $x' \preceq y' \Leftrightarrow x \preceq y$.

(ii) Η $\leq$ είναι μερική διάταξη του $A/\!\equiv$.

(iii) $[x] < [y] \;\Leftrightarrow\; x \preceq y \wedge y \not\preceq x$.

Έστω $\langle A, \leq \rangle$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, και έστω $B \subseteq A$ και $a \in A$. Ορισμοί:

- Το a είναι **μέγιστο στοιχείο** (ή **maximum**) του B αν $a \in B$ και $x \leq a$ για κάθε $x \in B$.
- Το a είναι **ελάχιστο στοιχείο** (ή **minimum**) του B αν $a \in B$ και $a \leq x$ για κάθε $x \in B$.
- Το a είναι **μεγιστικό στοιχείο** του B αν $a \in B$ και δεν υπάρχει $x \in B$ με $a < x$.
- Το a είναι **ελαχιστικό στοιχείο** του B αν $a \in B$ και δεν υπάρχει $x \in B$ με $x < a$.
- Το a είναι **άνω φράγμα** του B αν $x \leq a$ για κάθε $x \in B$.
- Το a είναι **κάτω φράγμα** του B αν $a \leq x$ για κάθε $x \in B$.
- Το a είναι **ελάχιστο άνω φράγμα** (ή **supremum**) του B αν το a είναι άνω φράγμα του B και $a \leq y$ για κάθε άνω φράγμα y του B.
- Το a είναι **μέγιστο κάτω φράγμα** (ή **infimum**) του B αν το a είναι κάτω φράγμα του B και $y \leq a$ για κάθε κάτω φράγμα y του B.

- Το B είναι **άνω φραγμένο** αν έχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα. (Αν το a είναι ένα άνω φράγμα του B, τότε λέμε επίσης ότι το B είναι **άνω φραγμένο από το** a.)
- Το B είναι **κάτω φραγμένο** αν έχει τουλάχιστον ένα κάτω φράγμα. (Αν το a είναι ένα κάτω φράγμα του B, τότε λέμε επίσης ότι το B είναι **κάτω φραγμένο από το** a.)
- Το B είναι **φραγμένο** αν είναι ταυτοχρόνως άνω φραγμένο και κάτω φραγμένο.

Είναι σαφές ότι το B έχει το πολύ ένα μέγιστο στοιχείο (ελάχιστο στοιχείο, ελάχιστο άνω φράγμα, μέγιστο κάτω φράγμα), αλλά μπορεί να έχει πολλά μεγιστικά στοιχεία (ελαχιστικά στοιχεία, άνω φράγματα, κάτω φράγματα). Το μέγιστο και το ελάχιστο στοιχείο του B (αν υπάρχουν) συμβολίζονται με

$$\max B, \quad \min B,$$

αντιστοίχως, ενώ το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα του B (αν υπάρχουν) συμβολίζονται με

$$\sup B, \quad \inf B,$$

αντιστοίχως.

Παρατήρηση 1.79 Έστω $\langle A, \leq\rangle$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω $B \subseteq A$. Αν το $\max B$ υπάρχει, τότε

$$\max B = \sup B$$

και το $\max B$ είναι το μοναδικό μεγιστικό στοιχείο του B. Ομοίως, αν το $\min B$ υπάρχει, τότε

$$\min B = \inf B$$

και το $\min B$ είναι το μοναδικό ελαχιστικό στοιχείο του B. Από την άλλη μεριά, η ύπαρξη του $\sup B$ (αντ. $\inf B$) δεν εγγυάται την ύπαρξη του $\max B$ (αντ. $\min B$).

Παρατήρηση 1.80 Έστω $\langle A, \leq\rangle$ ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω $B \subseteq A$. Τότε οι έννοιες "μέγιστο στοιχείο του B" και "μεγιστικό στοιχείο του B" είναι ταυτόσημες, δηλαδή ένα $a \in A$ είναι μέγιστο στοιχείο του B αν και μόνον το a είναι μεγιστικό στοιχείο του B. Ομοίως, οι έννοιες "ελάχιστο στοιχείο του B" και "ελαχιστικό στοιχείο του B" είναι ταυτόσημες.

Παράδειγμα 1.81 Έστω B ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ (όπου το $\mathbb{N}$ είναι εφοδιασμένο με τη συνήθη διάταξη $\leq$). Τότε:

(i) Το B έχει ελάχιστο στοιχείο.

(ii) Το B έχει μέγιστο στοιχείο αν και μόνον αν το B είναι πεπερασμένο.

Παράδειγμα 1.82 Έστω $\mathcal{A}$ το δυναμοσύνολο του συνόλου $\{1,2,3,4\}$, δηλαδή

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\left(\{1,2,3,4\}\right),$$

και έστω

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} - \{\varnothing, \{1,2,3,4\}\}.$$

Έτσι, το $\langle \mathcal{A}, \subseteq_{\mathcal{A}} \rangle$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Τα μεγιστικά στοιχεία του $\mathcal{B}$ είναι:

$$\{1,2,3\}, \ \{1,2,4\}, \ \{1,3,4\}, \ \{2,3,4\}.$$

Τα ελαχιστικά στοιχεία του $\mathcal{B}$ είναι:

$$\{1\}, \ \{2\}, \ \{3\}, \ \{4\}.$$

Παράδειγμα 1.83 Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$a = \sup\{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\},$$

$$a = \inf\{x \in \mathbb{Q} \mid a < x\}.$$

Άσκηση 1.84 Δείξτε ότι αν $\langle A, \leq \rangle$ είναι ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο, τότε κάθε πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του A έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο στοιχείο.

Έστω A ένα σύνολο και $<$ μια (αυστηρή) μερική διάταξη του A τέτοια ώστε κάθε μη κενό υποσύνολο του A έχει ελάχιστο στοιχείο. Τότε η $<$ λέγεται **καλή διάταξη** και το $\langle A, < \rangle$ (ή απλά το A) λέγεται **καλώς διατεταγμένο σύνολο**. Είναι προφανές ότι η $<$ είναι ολική διάταξη του A (αφού για κάθε $x, y \in A$ το $\{x, y\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο). Επίσης, ο περιορισμός της $<$ σε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο $B \subseteq A$ είναι μια καλή διάταξη του B.

Παρατήρηση 1.85 Για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί αργότερα (όταν θα συναντήσουμε την έννοια του διατακτικού αριθμού), είναι πιο βολικό ένα καλώς διατεταγμένο σύνολο να έχει τη μορφή $\langle A, < \rangle$ παρά τη μορφή $\langle A, \leq \rangle$.

Παράδειγμα 1.86 Η συνήθης διάταξη $<$ του $\mathbb{N}$ είναι μια καλή διάταξη.

Έστω R μια διμελής σχέση πάνω σε ένα σύνολο A, και S μια διμελής σχέση πάνω σε ένα σύνολο B. Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ λέγεται **ισομορφισμός** από το $\langle A, R\rangle$ στο $\langle B, S\rangle$ αν η f είναι αμφιρριπτική και

$$(\forall x, y \in A)\,[x\,R\,y \;\Leftrightarrow\; f\,(x)\;S\,f\,(y)]\,.$$

Αν υπάρχει ένας τέτοιος ισομορφισμός f, τότε γράφουμε

$$\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$$

και λέμε ότι το $\langle A, R\rangle$ είναι **ισόμορφο** με το $\langle B, S\rangle$. Ο συμβολισμός

$$\langle A, R\rangle \ncong \langle B, S\rangle$$

σημαίνει $\neg\,(\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle)$.

Άσκηση 1.87 Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Η ταυτοτική συνάρτηση id_A είναι ισομορφισμός από το $\langle A, R\rangle$ στο $\langle A, R\rangle$.

(ii) Αν η f είναι ισομορφισμός από το $\langle A, R\rangle$ στο $\langle B, S\rangle$, τότε η f^{-1} είναι ισομορφισμός από το $\langle B, S\rangle$ στο $\langle A, R\rangle$.

(iii) Αν η f είναι ισομορφισμός από το $\langle A, R\rangle$ στο $\langle B, S\rangle$ και η g είναι ισομορφισμός από το $\langle B, S\rangle$ στο $\langle C, T\rangle$, τότε η $g \circ f$ είναι ισομορφισμός από το $\langle A, R\rangle$ στο $\langle C, T\rangle$.

Θεώρημα 1.88 *Έστω $\langle A, \leq\rangle$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}\,(A)$ τέτοια ώστε $\langle A, \leq\rangle \cong \langle \mathcal{B}, \subseteq_{\mathcal{B}}\rangle$.*

Απόδειξη Για κάθε $x \in A$, θέτουμε

$$\widetilde{x} = \{y \in A \mid y \leq x\}\,.$$

Επίσης, θέτουμε

$$\mathcal{B} = \{\widetilde{x} \mid x \in A\}\,.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathcal{B}$ με τύπο

$$f\,(x) = \widetilde{x}$$

είναι ένας ισομορφισμός από το $\langle A, \leq\rangle$ στο $\langle \mathcal{B}, \subseteq_{\mathcal{B}}\rangle$. ■

Έστω $f : A \longrightarrow B$, όπου $\langle A, <\rangle$ και $\langle B, <\rangle$ είναι δύο ολικώς διατεταγμένα σύνολα. (Το γεγονός ότι συμβολίζουμε και τις δύο σχέσεις διάταξης με $<$ δεν σημαίνει φυσικά ότι οι σχέσεις αυτές ταυτίζονται.) Ορισμοί:

- Η f είναι **αύξουσα** αν $(\forall x, y \in A)\,[x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]$.
- Η f είναι **γνησίως αύξουσα** αν $(\forall x, y \in A)\,[x < y \Rightarrow f(x) < f(y)]$.
- Η f είναι **φθίνουσα** αν $(\forall x, y \in A)\,[x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)]$.
- Η f είναι **γνησίως φθίνουσα** αν $(\forall x, y \in A)\,[x < y \Rightarrow f(x) > f(y)]$.
- Η f είναι **μονότονη** αν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
- Η f είναι **γνησίως μονότονη** αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 1.89 Έστω $f : A \longrightarrow B$, όπου $\langle A, < \rangle$ και $\langle B, < \rangle$ είναι δύο ολικώς διατεταγμένα σύνολα. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε $(\forall x, y \in A)\,[x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)]$.

(ii) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $(\forall x, y \in A)\,[x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)]$.

(iii) Αν η f είναι γνησίως μονότονη, τότε η f είναι ενριπτική.

1.6 Σύγκριση του μεγέθους δύο συνόλων

Έστω A, B δύο σύνολα. Αν υπάρχει αμφίρριψη $f : A \longrightarrow B$, τότε γράφουμε

$$A \approx B$$

και λέμε ότι τα A, B είναι **ισοπληθή**. Αν υπάρχει ένριψη $g : A \longrightarrow B$, τότε γράφουμε

$$A \precsim B.$$

Επίσης, θέτουμε

$$A \prec B \;:\Leftrightarrow\; A \precsim B \wedge B \not\precsim A.$$

Παράδειγμα 1.90 Έστω A, B δύο πεπερασμένα σύνολα με m και n στοιχεία, αντιστοίχως. Τότε:

(i) $A \approx B \Leftrightarrow m = n$.

(ii) $A \precsim B \Leftrightarrow m \leq n$.

(iii) $A \prec B \Leftrightarrow m < n$.

Παράδειγμα 1.91 Έστω $A \subseteq B$. Η συνάρτηση εγκλεισμού $i : A \hookrightarrow B$ είναι ενριπτική, επομένως $A \precsim B$.

Παράδειγμα 1.92 Έστω A το σύνολο των άρτιων ακέραιων αριθμών. Η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ με τύπο

$$f(k) = 2k$$

είναι αμφιρριπτική, επομένως $\mathbb{Z} \approx A$.

Παράδειγμα 1.93 Η συνάρτηση $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ με τύπο

$$g(m,n) = 2^m 3^n$$

είναι ενριπτική, επομένως $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \precsim \mathbb{Z}^+$.

Παράδειγμα 1.94 Η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ με τύπο

$$h(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

είναι αμφιρριπτική, επομένως $\mathbb{R} \approx (-1,1)$.

Άσκηση 1.95 Δείξτε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$, τότε $(-1,1) \approx (a,b)$.

Θεώρημα 1.96 *Έστω A, B, C σύνολα. Έχουμε:*

(i) $A \approx A$.

(ii) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$.

(iii) $A \approx B \wedge B \approx C \ \Rightarrow \ A \approx C$.

(iv) $A \precsim A$.

(v) $A \precsim B \wedge B \precsim C \ \Rightarrow \ A \precsim C$.

Θεώρημα 1.97 *Έστω A ένα σύνολο. Τότε $\mathcal{P}(A) \approx {}^{A}\{0,1\}$.*

Απόδειξη Πρώτα δίνουμε έναν ορισμό: η **χαρακτηριστική συνάρτηση** ενός υποσυνόλου $B \subseteq A$ είναι η συνάρτηση $\chi_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ με τύπο

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in B, \\ 0 & \text{αν } x \notin B. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο κανόνας $B \mapsto \chi_B$ ορίζει μια αμφίρριψη από το $\mathcal{P}(A)$ στο ${}^{A}\{0,1\}$. ■

Ο επόμενος στόχος μας είναι να δείξουμε ότι

$$A \precsim B \wedge B \precsim A \;\Rightarrow\; A \approx B.$$

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις αυτού του σημαντικού αποτελέσματος, η πρώτη από τις οποίες βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 1.98 *Έστω A ένα σύνολο και $F : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ μια συνάρτηση η οποία είναι* ***ισότονη****, δηλαδή*

$$X \subseteq Y \Rightarrow F(X) \subseteq F(Y)$$

για κάθε $X, Y \in \mathcal{P}(A)$. Τότε η F έχει ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει ένα $S \in \mathcal{P}(A)$ τέτοιο ώστε

$$F(S) = S.$$

Απόδειξη Θέτουμε

$$\mathcal{K} = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq F(X)\}$$

και

$$S = \bigcup \mathcal{K}.$$

Για κάθε $X \in \mathcal{K}$, έχουμε $X \subseteq F(X)$ και $F(X) \subseteq F(S)$ (αφού $X \subseteq S$ και η F είναι ισότονη), οπότε $X \subseteq F(S)$. Επομένως $\bigcup \mathcal{K} \subseteq F(S)$, δηλαδή

$$S \subseteq F(S).$$

Αυτό (ξανά λόγω της ισοτονίας της F) συνεπάγεται ότι

$$F(S) \subseteq F(F(S)),$$

δηλαδή $F(S) \in \mathcal{K}$. Έτσι,

$$F(S) \subseteq \bigcup \mathcal{K} = S$$

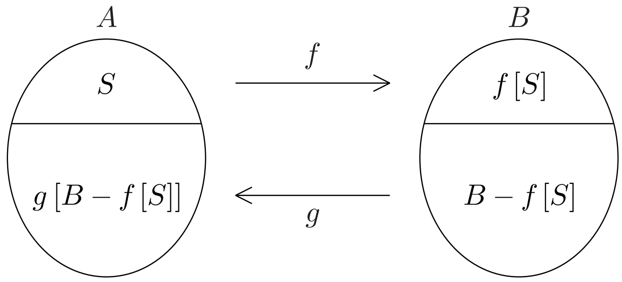
και άρα $F(S) = S$. ■

Θεώρημα 1.99 (Schröder-Bernstein) *Αν A, B είναι δύο σύνολα τέτοια ώστε $A \precsim B$ και $B \precsim A$, τότε $A \approx B$.*

Απόδειξη Έστω $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow A$ δύο ενρίψεις. Η ιδέα είναι να βρούμε ένα σύνολο $S \subseteq A$ με

$$A - S = g\left[B - f\left[S\right]\right],$$

δηλαδή όπως δείχνει η επόμενη εικόνα:



Χρησιμοποιώντας ένα τέτοιο σύνολο, μπορούμε αμέσως να κατασκευάσουμε μια αμφίρριψη $h : A \longrightarrow B$, θέτοντας

$$h\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & \text{αν } x \in S, \\ g^{-1}\left(x\right) & \text{αν } x \in A - S. \end{cases}$$

Το ερώτημα τώρα είναι πώς θα βρούμε το S. Η ισότητα $A - S = g\left[B - f\left[S\right]\right]$, που ισοδύναμα γράφεται

$$S = A - g\left[B - f\left[S\right]\right],$$

σημαίνει ότι το S είναι σταθερό σημείο της συνάρτησης $F : \mathcal{P}\left(A\right) \longrightarrow \mathcal{P}\left(A\right)$ με τύπο

$$F\left(X\right) = A - g\left[B - f\left[X\right]\right].$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η F είναι ισότονη. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 1.98, η F έχει όντως ένα σταθερό σημείο.

Δεύτερη απόδειξη Ας υποθέσουμε πάλι ότι $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow A$ είναι δύο ενρίψεις. Θέτουμε

$$A_0 = A, \quad B_0 = B,$$

$$A_{n+1} = g\left[B_n\right], \quad B_{n+1} = f\left[A_n\right],$$

οπότε (χρησιμοποιώντας επαγωγή)

$$A_n \supseteq A_{n+1}, \quad B_n \supseteq B_{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τα σύνολα

$$X_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(A_{2n} - A_{2n+1}\right), \quad X_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(A_{2n+1} - A_{2n+2}\right), \quad X_3 = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

είναι ανά δύο ξένα και

$$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = A.$$

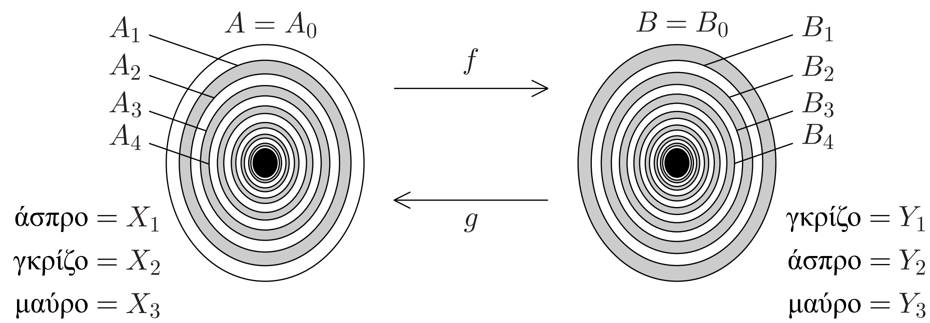
Ομοίως, τα σύνολα

$$Y_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(B_{2n} - B_{2n+1}\right), \quad Y_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left(B_{2n+1} - B_{2n+2}\right), \quad Y_3 = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$$

είναι ανά δύο ξένα και

$$Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = B.$$

Μπορούμε να σχεδιάσουμε τα X_1, X_2, X_3 και Y_1, Y_2, Y_3 ως εξής:



Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$f\left[X_1\right] = Y_2, \quad f\left[X_3\right] = Y_3, \quad g\left[Y_1\right] = X_2.$$

Έτσι, η συνάρτηση $h : A \longrightarrow B$ με τύπο

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } x \in X_1 \cup X_3, \\ g^{-1}(x) & \text{αν } x \in X_2 \end{cases}$$

είναι αμφιρριπτική, και άρα $A \approx B$. ∎

Πόρισμα 1.100 $A \prec B \;\Leftrightarrow\; A \precsim B \wedge A \not\approx B$.

Άσκηση 1.101 Δείξτε ότι $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \approx \mathbb{Z}^+$.

Άσκηση 1.102 Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη τετριμμένο διάστημα (δηλαδή ένα διάστημα το οποίο δεν είναι της μορφής $[a, a] = \{a\}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$). Δείξτε ότι $I \approx \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.103 (Cantor) *Έστω A ένα σύνολο. Τότε $A \prec \mathcal{P}(A)$.*

Απόδειξη Η συνάρτηση $x \mapsto \{x\}$ από το A στο $\mathcal{P}(A)$ είναι $1-1$, οπότε $A \precsim \mathcal{P}(A)$. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει επιρριπτική συνάρτηση από το A στο $\mathcal{P}(A)$. Ας υποθέσουμε ότι $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ είναι μια τέτοια συνάρτηση. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}.$$

Επειδή $B \in \mathcal{P}(A)$ και η f είναι επίρριψη, υπάρχει ένα $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) = B$. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$a \in f(a) \Leftrightarrow a \notin f(a).$$

Αυτό όμως είναι άτοπο. ■

1.7 Αριθμήσιμα σύνολα

Έστω A ένα σύνολο. Αν $A \approx \mathbb{N}$, τότε λέμε ότι το A είναι **απειραριθμήσιμο** (ή **αριθμήσιμα άπειρο**) σύνολο. Αν το A είναι πεπερασμένο ή απειραριθμήσιμο, τότε λέμε ότι το A είναι **αριθμήσιμο**. Αν το A δεν είναι αριθμήσιμο, τότε λέμε ότι το A είναι **υπεραριθμήσιμο** (ή **μη αριθμήσιμο**).

Παράδειγμα 1.104 Η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ με τύπο

$$f(n) = \begin{cases} 2n-1 & \text{αν } n > 0, \\ -2n & \text{αν } n \leq 0 \end{cases}$$

είναι αμφιρριπτική, επομένως το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι απειραριθμήσιμο.

Θεώρημα 1.105 *Έχουμε:*

(i) Κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

(ii) Ένα σύνολο A είναι αριθμήσιμο αν και μόνον αν $A \precsim \mathbb{N}$.

(iii) Ένα μη κενό σύνολο A είναι αριθμήσιμο αν και μόνον αν υπάρχει μια επίρριψη από το $\mathbb{N}$ στο A.

(iv) Κάθε υποσύνολο ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη (i): Σίγουρα κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. Στη συνέχεια, έστω A ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ με τύπο

$$f(n) = \min\left[A - \{f(i) : i < n\}\right].$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η f είναι αμφιρριπτική. Επομένως το A είναι απειραριθμήσιμο.

(ii): Αν το A είναι αριθμήσιμο, τότε προφανώς $A \precsim \mathbb{N}$. Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει μια ένριψη $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Τότε $A \approx \operatorname{ran}(f)$ και το $\operatorname{ran}(f)$ είναι αριθμήσιμο σύμφωνα με το (i), άρα το A είναι αριθμήσιμο.[4]

(iii): Αν το A είναι αριθμήσιμο, τότε προφανώς υπάρχει μια επίρριψη από το $\mathbb{N}$ στο A. Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει μια επίρριψη $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$. Η συνάρτηση $g : A \longrightarrow \mathbb{N}$ με τύπο

$$g(a) = \min f^{-1}\left[\{a\}\right]$$

είναι $1-1$. Έτσι, $A \precsim \mathbb{N}$ και άρα το A είναι αριθμήσιμο σύμφωνα με το (ii).

(iv): Προφανής συνέπεια του (ii). ∎

Θεώρημα 1.106 *Έχουμε:*

(i) Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ είναι απειραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$) είναι απειραριθμήσιμα (αντ. αριθμήσιμα) σύνολα, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ είναι απειραριθμήσιμο (αντ. αριθμήσιμο) σύνολο.

(iii) Αν A είναι ένα απειραριθμήσιμο σύνολο και B είναι ένα πεπερασμένο μη κενό σύνολο, τότε το ${}^{B}A$ είναι απειραριθμήσιμο σύνολο.

(iv) Αν $\mathcal{F}$ είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια αριθμήσιμων συνόλων, τότε η ένωση $\bigcup \mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(v) Αν A είναι ένα απειραριθμήσιμο σύνολο, τότε η οικογένεια όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του A είναι απειραριθμήσιμο σύνολο.

[4] Αν το ένα από δύο ισοπληθή σύνολα είναι αριθμήσιμο, τότε φυσικά και το άλλο είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη (i): Η $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ με τύπο

$$f(m,n) = 2^m 3^n$$

και η $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με τύπο

$$g(n) = \langle n, 0 \rangle$$

είναι ενριπτικές συναρτήσεις. Έχουμε λοιπόν $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, οπότε $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$ δυνάμει του θεωρήματος Schröder-Bernstein.

(ii): Με το (i) και επαγωγή στο n.

(iii): Έστω n το πλήθος των στοιχείων του B. Είναι εύκολο να δούμε ότι ${}^B A \approx A^n$. Επίσης, $A^n \approx \mathbb{N}$ σύμφωνα με το (ii).

(iv): Για να αποφύγουμε τετριμμένες περιπτώσεις, θα υποθέσουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι μια μη κενή αριθμήσιμη οικογένεια μη κενών αριθμήσιμων συνόλων. Γράφουμε $\mathcal{F} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ διαλέγουμε μια επίρριψη $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow A_n$. Η συνάρτηση $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ με τύπο

$$g(n,k) = f_n(k)$$

είναι επιρριπτική. Έτσι, αφού $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ σύμφωνα με το (i), υπάρχει μια επίρριψη $h : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$. Αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο $\bigcup \mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμο.

(v): Έστω $\mathcal{U}$ η οικογένεια όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του A, όπου $A \approx \mathbb{N}$. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι η $\mathcal{U}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $\mathcal{S}_n$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\{i \in \mathbb{N} : i < n\}$ στο A. Σύμφωνα με το (iii) και το (iv), η ένωση $\bigcup_n \mathcal{S}_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο και άρα υπάρχει μια επιρριπτική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_n \mathcal{S}_n$. Αλλά και η συνάρτηση $g : \bigcup_n \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathcal{U}$ με τύπο

$$g(s) = \operatorname{ran}(s)$$

είναι επιρριπτική. Συνθέτοντας τις δύο αυτές συναρτήσεις παίρνουμε μια επίρριψη $g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{U}$, άρα η $\mathcal{U}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. ■

Θεώρημα 1.107 *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι απειραριθμήσιμο.*

Απόδειξη Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ είναι αριθμήσιμο και η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}$ με τύπο

$$f(m,n) = \frac{m}{n}$$

είναι επιρριπτική. ■

Θεώρημα 1.108 *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη τετριμμένο διάστημα (δηλαδή ένα διάστημα το οποίο δεν είναι μονοσύνολο). Τότε το I είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι το I είναι αριθμήσιμο. Έτσι, το I μπορεί να γραφεί ως

$$I = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Θεωρούμε μια ακολουθία

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$$

μη τετριμμένων κλειστών υποδιαστημάτων του I τέτοια ώστε

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(a_n \notin I_n).$$

Σύμφωνα με την αρχή κιβωτισμού, $\bigcap_n I_n \neq \varnothing$ και άρα υπάρχει ένα $a_k \in \bigcap_n I_n$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $a_k \in I_k$, το οποίο είναι άτοπο. ■

Άσκηση 1.109 Δείξτε ότι κάθε άπειρο σύνολο έχει ένα απειραριθμήσιμο υποσύνολο.

Άσκηση 1.110 Δείξτε ότι αν το A είναι ένα άπειρο σύνολο, τότε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Κεφάλαιο 2

Αλγεβρικές δομές

2.1 Ημιομάδες και μονοειδή

Οι διάφορες πράξεις που μελετάμε στην άλγεβρα είναι συνήθως διμελείς. Έστω $f : A^2 \longrightarrow A$ μια διμελής πράξη πάνω σε ένα σύνολο $A \neq \varnothing$. Φανταζόμαστε την f σαν ένα είδος πολλαπλασιασμού, οπότε για κάθε $\langle a, b\rangle \in A^2$ το στοιχείο $f(a, b)$ γράφεται

$$a \cdot b \quad \text{ή} \quad ab$$

και λέγεται **γινόμενο** των a και b. Αν

$$a(bc) = (ab)c$$

για κάθε $a, b, c \in A$, η πράξη λέγεται **προσεταιριστική**. Αν

$$ab = ba$$

για κάθε $a, b \in A$, η πράξη λέγεται **αντιμεταθετική**.

Μερικές φορές αντί για τον πολλαπλασιαστικό συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, μας βολεύει περισσότερο ο προσθετικός συμβολισμός. Έτσι, αντί για ab γράφουμε

$$a + b,$$

το οποίο λέγεται **άθροισμα** των a και b. Ο προσθετικός συμβολισμός χρησιμοποιείται κατά κανόνα μόνο για αντιμεταθετικές πράξεις.

Μια διμελής πράξη $\cdot$ πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ συχνά περιγράφεται με τη βοήθεια ενός πίνακα με n γραμμές και n στήλες, τις οποίες ονομάζουμε “a_1”, …, “a_n”, έτσι ώστε το στοιχείο $a_i a_j$ $(= a_i \cdot a_j)$ να εμφανίζεται στη διασταύρωση της γραμμής “a_i” με τη στήλη “a_j”:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\cdot & a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \\
\hline
a_1 & a_1a_1 & \cdots & a_1a_j & \cdots & a_1a_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_i & a_ia_1 & \cdots & a_ia_j & \cdots & a_ia_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_n & a_na_1 & \cdots & a_na_j & \cdots & a_na_n
\end{array}$$

Ένας τέτοιος πίνακας λέγεται **πίνακας Cayley**. Τα στοιχεία του συνόλου γράφονται στην πάνω και στην αριστερή πλευρά του πίνακα (ως ονομασίες των στηλών και των γραμμών) πάντα με την ίδια σειρά. Κατά συνέπεια, έχουμε ένα χρήσιμο κριτήριο αντιμεταθετικότητας: η πράξη είναι αντιμεταθετική αν και μόνον αν τα στοιχεία του πίνακα είναι συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο που ενώνει την πάνω αριστερή με την κάτω δεξιά γωνία.

Παράδειγμα 2.1 Έστω $A = \{1, i, -1, -i\}$ το σύνολο των τέταρτων ριζών της μονάδας. Το A είναι κλειστό ως προς τον συνήθη πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών. Ο πίνακας Cayley για τον πολλαπλασιασμό του A είναι:

$$\begin{array}{r|rrrr}
\cdot & 1 & i & -1 & -i \\
\hline
1 & 1 & i & -1 & -i \\
i & i & -1 & -i & 1 \\
-1 & -1 & -i & 1 & i \\
-i & -i & 1 & i & -1
\end{array}$$

Με τον όρο **ημιομάδα** εννοούμε ένα διατεταγμένο ζεύγος $\langle S, \cdot\rangle$ που αποτελείται από ένα σύνολο $S \neq \varnothing$ και μια προσεταιριστική πράξη $\cdot$ πάνω στο S. Χάριν συντομίας, συχνά ταυτίζουμε μια ημιομάδα $\langle S, \cdot\rangle$ με το σύνολο S.

Θεώρημα 2.2 (γενικευμένος προσεταιριστικός νόμος)
Αν $\langle S, \cdot\rangle$ είναι μια ημιομάδα και $a_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε το γινόμενο

$$a_1 a_2 \cdots a_n$$

είναι ανεξάρτητο από παρενθέσεις.

Απόδειξη Παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.14. ■

Μια ημιομάδα λέγεται **αντιμεταθετική** ή **αβελιανή** αν η πράξη της είναι αντιμεταθετική.

Θεώρημα 2.3 (γενικευμένος αντιμεταθετικός νόμος)
Αν $\langle S, \cdot \rangle$ είναι μια αντιμεταθετική ημιομάδα και $a_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε το γινόμενο

$$a_1 a_2 \cdots a_n$$

είναι ανεξάρτητο από τη σειρά των παραγόντων.

Έστω S μια ημιομάδα και $a \in S$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, η **δύναμη** a^n ορίζεται με τον αναμενόμενο τρόπο, δηλαδή

$$a^n := \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ φορές}}.$$

Αν χρησιμοποιούμε προσθετικό συμβολισμό, τότε αντί για a^n γράφουμε na, δηλαδή

$$na := \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ φορές}},$$

και μιλάμε για **πολλαπλάσιο** του a.

Θεώρημα 2.4 *Σε κάθε ημιομάδα ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες δυνάμεων, όπου οι εκθέτες είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί:*

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(iii) $ab = ba \Rightarrow (ab)^n = a^n b^n$.

Έστω S μια ημιομάδα. Ένα στοιχείο $e \in S$ λέγεται **ταυτοτικό** ή **ουδέτερο στοιχείο** της S αν

$$ae = ea = a$$

για κάθε $a \in S$.

Θεώρημα 2.5 *Κάθε ημιομάδα έχει το πολύ ένα ταυτοτικό στοιχείο.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι e και e' είναι ταυτοτικά στοιχεία μιας ημιομάδας S. Επειδή $ae = ea = a$ για κάθε $a \in S$, έχουμε

$$e'e = e'.$$

Ομοίως, επειδή $ae' = e'a = a$ για κάθε $a \in S$, έχουμε

$$e'e = e.$$

Συνεπώς $e = e'$ και η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Μια ημιομάδα η οποία έχει ταυτοτικό στοιχείο λέγεται **μονοειδές**. Το (μοναδικό) ταυτοτικό στοιχείο ενός μονοειδούς M συμβολίζεται με

$$1_M \quad \text{ή απλά} \quad 1.$$

Αν για το M χρησιμοποιείται προσθετικός συμβολισμός, τότε το ταυτοτικό στοιχείο γράφεται

$$0_M \quad \text{ή απλά} \quad 0.$$

Παράδειγμα 2.6 Με την (συνήθη) πράξη του πολλαπλασιασμού, το σύνολο $\mathbb{Z}^+$ είναι μονοειδές. Με την (συνήθη) πράξη της πρόσθεσης, το $\mathbb{Z}^+$ είναι ημιομάδα αλλά όχι μονοειδές.

Παράδειγμα 2.7 Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Το σύνολο ${}^X X$ (όλων των συναρτήσεων από το X στο X) αποτελεί μονοειδές ως προς την πράξη της σύνθεσης, με ταυτοτικό στοιχείο την ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$. Παρατηρούμε ότι αν το X έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε το μονοειδές ${}^X X$ δεν είναι αντιμεταθετικό.

Έστω M ένα μονοειδές και $a \in M$. Θέτουμε

$$a^0 := 1_M,$$

έτσι ώστε η δύναμη a^n να έχει νόημα για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 2.8 *Σε κάθε μονοειδές ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες δυνάμεων, όπου οι εκθέτες είναι φυσικοί αριθμοί:*

(i) $1^n = 1$.

(ii) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(iv) $ab = ba \Rightarrow (ab)^n = a^n b^n$.

Έστω M ένα μονοειδές και $a \in M$. Ένα στοιχείο $b \in M$ λέγεται **αντίστροφο** του a αν

$$ab = ba = 1.$$

Θεώρημα 2.9 *Κάθε στοιχείο ενός μονοειδούς έχει το πολύ ένα αντίστροφο.*

Απόδειξη Έστω M ένα μονοειδές και $a \in M$. Αν $b, b' \in M$ είναι δύο αντίστροφα στοιχεία του a, τότε

$$b = 1b = \left(b'a\right) b = b' \left(ab\right) = b'1 = b'.$$

Επομένως το a έχει το πολύ ένα αντίστροφο. ■

Έστω M ένα μονοειδές και $a \in M$ ένα στοιχείο το οποίο έχει αντίστροφο. Τότε το a λέγεται **αντιστρέψιμο στοιχείο** ή **μονάδα** (του M) και το αντίστροφό του συμβολίζεται με

$$a^{-1}.$$

Αν για το M χρησιμοποιείται προσθετικός συμβολισμός, τότε το αντίστροφο του a γράφεται

$$-a$$

και λέγεται **αντίθετο** του a. Το σύνολο όλων των μονάδων του M συμβολίζεται με

$$M^*.$$

Παράδειγμα 2.10 Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow X$ (όπου $X \neq \varnothing$) είναι μονάδα του μονοειδούς ${}^X X$ αν και μόνον αν η f είναι αμφιρριπτική. Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται **μετάθεση** του X.

Θεώρημα 2.11 *Σε κάθε μονοειδές M ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $1 \in M^*$ *και* $1^{-1} = 1$.

(ii) *Αν* $a \in M^*$, *τότε* $a^{-1} \in M^*$ *και* $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(iii) *Αν* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M^*$, *τότε* $a_1 a_2 \cdots a_n \in M^*$ *και* $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_2^{-1} a_1^{-1}$.

2.2 Ομάδες

Αν όλα τα στοιχεία ενός μονοειδούς είναι αντιστρέψιμα, τότε το μονοειδές λέγεται **ομάδα**.

Παράδειγμα 2.12 Έστω $G = \{e\}$ ένα μονοσύνολο. Τότε υπάρχει μία μόνο διμελής πράξη στο G, δηλαδή $ee = e$, και με την πράξη αυτή το G αποτελεί ομάδα. Μια τέτοια ομάδα (που έχει δηλαδή ένα μόνο στοιχείο) λέγεται **τετριμμένη ομάδα**.

Παράδειγμα 2.13 Έστω $G = \{e, a\}$ ένα σύνολο με δύο στοιχεία. Ορίζουμε στο G μια διμελή πράξη $\cdot$ με τον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & e & a \\ \hline e & e & a \\ a & a & e \end{array}$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το διατεταγμένο ζεύγος $\langle G, \cdot \rangle$ είναι ομάδα.

Παράδειγμα 2.14 Καθένα από τα σύνολα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι ομάδα ως προς την πρόσθεση.

Πολλά σημαντικά παραδείγματα ομάδων είναι ειδικές περιπτώσεις του επόμενου αποτελέσματος:

Θεώρημα 2.15 *Έστω M ένα μονοειδές. Τότε το σύνολο M^* αποτελεί ομάδα ως προς την πράξη που κληρονομεί από το M.*

Αν M είναι ένα μονοειδές, τότε η ομάδα M^* λέγεται **ομάδα των μονάδων** του M.

Παράδειγμα 2.16 Η ομάδα των μονάδων του μονοειδούς $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ είναι

$$\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}.$$

Παράδειγμα 2.17 Έστω K ένα από τα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Η ομάδα των μονάδων του μονοειδούς $\langle K, \cdot \rangle$ είναι

$$K^* = K - \{0\}.$$

Παράδειγμα 2.18 Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Η ομάδα των μονάδων του ${}^X X$ συμβολίζεται με S_X. Έτσι,

$$S_X := \left({}^X X\right)^* = \{f \mid f \text{ είναι μετάθεση του } X\}.$$

Η S_X λέγεται **συμμετρική ομάδα** πάνω στο X.

Θεώρημα 2.19 *Σε κάθε ομάδα G ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $1^{-1} = 1$.

(ii) $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

(iii) $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_2^{-1} a_1^{-1}$.

(iv) $ab = ac \Rightarrow b = c$ *(**αριστερός νόμος διαγραφής**).*

(v) $ba = ca \Rightarrow b = c$ *(**δεξιός νόμος διαγραφής**).*

(vi) Για κάθε $a, b \in G$, οι εξισώσεις

$$ax = b, \quad ya = b$$

έχουν μοναδικές λύσεις στην G, δηλαδή

$$x = a^{-1}b, \quad y = ba^{-1}.$$

Θεώρημα 2.20 *Μια ημιομάδα S είναι ομάδα αν και μόνον αν η S περιέχει ένα στοιχείο 1 με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $1a = a$ *για κάθε* $a \in S$ *(**αριστερό ταυτοτικό στοιχείο**).*

*(ii) Για κάθε $a \in S$, υπάρχει ένα στοιχείο $a' \in S$ τέτοιο ώστε $a'a = 1$ (**αριστερό αντίστροφο στοιχείο**).*

(Ομοίως για δεξιό ταυτοτικό και δεξιά αντίστροφα στοιχεία.)

Απόδειξη Για τη μη τετριμμένη κατεύθυνση, έστω ότι υπάρχει στοιχείο $1 \in S$ με τις ιδιότητες (i) και (ii). Αν κάποιο $x \in S$ ικανοποιεί $xx = x$, τότε έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} x'xx &= x'x, \\ 1x &= 1, \\ x &= 1, \end{aligned}$$

όπου x' είναι ένα αριστερό αντίστροφο του x. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι

$$xx = x \Rightarrow x = 1.$$

Τώρα, έστω $a \in S$ και έστω a' ένα αριστερό αντίστροφο του a. Έχουμε

$$\left(aa'\right)\left(aa'\right) = a\left(a'a\right)a' = a1a' = aa',$$

οπότε, σύμφωνα με την παραπάνω συνεπαγωγή,

$$aa' = 1.$$

Επίσης,

$$a1 = a\left(a'a\right) = \left(aa'\right)a = 1a = a.$$

Συνεπώς η S είναι ομάδα. ∎

Θεώρημα 2.21 *Μια ημιομάδα S είναι ομάδα αν και μόνον αν για κάθε $a, b \in S$, οι εξισώσεις*

$$ax = b, \quad ya = b$$

έχουν λύσεις στην S.

Απόδειξη Για τη μη τετριμμένη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι οι εξισώσεις $ax = b$ και $ya = b$ έχουν πάντοτε λύσεις στην S. Διαλέγουμε ένα σταθερό στοιχείο $c \in S$, καθώς και ένα στοιχείο $1 \in S$ το οποίο είναι λύση της εξίσωσης $yc = c$. Με άλλα λόγια, τα στοιχεία 1 και c ικανοποιούν

$$1c = c.$$

Τώρα, έστω $a \in S$. Διαλέγοντας το $u \in S$ να είναι μια λύση της εξίσωσης $cx = a$ (δηλαδή $cu = a$), έχουμε

$$1a = 1\,(cu) = (1c)\,u = cu = a.$$

Επίσης, διαλέγοντας το $a' \in S$ να είναι λύση της εξίσωσης $ya = 1$, έχουμε

$$a'a = 1.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.20, η S είναι ομάδα. ■

Έστω G μια ομάδα και $a \in G$. Αν $k \in \mathbb{Z}^+$, θέτουμε

$$a^{-k} := \left(a^{-1}\right)^k = \left(a^k\right)^{-1}.$$

(Παρατηρούμε ότι η περίπτωση $k = 1$ δεν δημιουργεί καμία ασάφεια.) Έτσι, η δύναμη a^n έχει νόημα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Θεώρημα 2.22 *Σε κάθε ομάδα ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες δυνάμεων, όπου οι εκθέτες είναι ακέραιοι αριθμοί:*

(i) $1^n = 1$.

(ii) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(iv) $ab = ba \Rightarrow (ab)^n = a^n b^n$.

Σε μια προσθετική αβελιανή ομάδα[1] G, η πράξη της **αφαίρεσης** ορίζεται με τον προφανή τρόπο, δηλαδή

$$a - b := a + (-b)$$

για κάθε $a, b \in G$. (Αν η G είναι μια από τις προσθετικές ομάδες $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, τότε $a - b$ είναι η συνήθης διαφορά των αριθμών a, b.)

Θεώρημα 2.23 *Σε κάθε προσθετική αβελιανή ομάδα ισχύουν τα ακόλουθα (όπου $n, m \in \mathbb{Z}$):*

(i) $-0 = 0$.

(ii) $-(-a) = a$.

(iii) $-(a_1 + a_2 + \cdots + a_r) = (-a_1) + (-a_2) + \cdots + (-a_r)$.

(iv) $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$.

(v) $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

(vi) $-(a + b) = -a - b$.

(vii) $-(a - b) = -a + b = b - a$.

(viii) $n0 = 0$.

(ix) $(-n)\, a = n\,(-a) = -(na)$.

(x) $(-n)(-a) = na$.

(xi) $(m \pm n)\, a = ma \pm na$.

(xii) $n\,(a \pm b) = na \pm nb$.

(xiii) $m\,(na) = (mn)\, a$.

[1] Δηλαδή αβελιανή ομάδα με προσθετικό συμβολισμό.

2.3 Δακτύλιοι

Έστω R ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με δύο διμελείς πράξεις

$$\langle a, b\rangle \mapsto a+b, \quad \langle a, b\rangle \mapsto ab,$$

που θα τις λέμε "πρόσθεση" και "πολλαπλασιασμό" αντιστοίχως, έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Το R είναι αβελιανή ομάδα ως προς την πρόσθεση.

(ii) Το R είναι μονοειδές ως προς τον πολλαπλασιασμό.

(iii) Οι δύο πράξεις συνδέονται με τους **επιμεριστικούς νόμους**:

$$a\,(b+c) = ab+ac, \quad (b+c)\,a = ba+ca$$

για κάθε $a, b, c \in R$.

Τότε το R (ή ακριβέστερα η διατεταγμένη τριάδα $\langle R, +, \cdot\rangle$) λέγεται **δακτύλιος**. Το ουδέτερο στοιχείο του R για την πρόσθεση συμβολίζεται με 0_R, ενώ το ουδέτερο στοιχείο του R για τον πολλαπλασιασμό συμβολίζεται με 1_R και λέγεται **μοναδιαίο στοιχείο** του R. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, τα δύο αυτά στοιχεία θα γράφονται

$$0 \quad \text{και} \quad 1,$$

αντιστοίχως. Ένα στοιχείο $u \in R$ λέγεται **μονάδα** του R αν το u είναι μονάδα (δηλαδή αντιστρέψιμο στοιχείο) του μονοειδούς $\langle R, \cdot\rangle$. Το σύνολο όλων των μονάδων του R συμβολίζεται με

$$R^*.$$

Το R^* αποτελεί ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό, η οποία λέγεται **πολλαπλασιαστική ομάδα** του R. Αν ο πολλαπλασιασμός του R είναι αντιμεταθετικός, δηλαδή

$$ab = ba$$

για κάθε $a, b \in R$, τότε λέμε ότι ο R είναι **αντιμεταθετικός δακτύλιος**.

Παράδειγμα 2.24 Τα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι αντιμεταθετικοί δακτύλιοι ως προς τις συνήθεις πράξεις. Επίσης, όπως ήδη γνωρίζουμε από τα Παραδείγματα 2.16 και 2.17, οι πολλαπλασιαστικές ομάδες αυτών των δακτυλίων είναι

$$\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}, \quad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}.$$

Παράδειγμα 2.25 Έστω $n \in \mathbb{Z}^+$. Ορίζουμε πάνω στο σύνολο $\mathbb{Z}_n$ δύο πράξεις (πρόσθεση και πολλαπλασιασμό) θέτοντας

$$[a] + [b] := [a+b], \quad [a]\,[b] := [ab].$$

Οι πράξεις αυτές είναι καλώς ορισμένες διότι αν $[a] = [a']$ και $[b] = [b']$, τότε $[a+b] = [a'+b']$ και $[ab] = [a'b']$. Επίσης, με τις εν λόγω πράξεις το $\mathbb{Z}_n$ αποτελεί αντιμεταθετικό δακτύλιο. Η πολλαπλασιαστική ομάδα του $\mathbb{Z}_n$ είναι

$$\mathbb{Z}_n^* = \{[a] \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ΜΚΔ}\,(a,n) = 1\}.$$

[Παρατηρούμε ότι αν $[a] = [a']$, τότε έχουμε $\text{ΜΚΔ}\,(a,n) = \text{ΜΚΔ}\,(a',n)$ και άρα $\text{ΜΚΔ}\,(a,n) = 1 \Leftrightarrow \text{ΜΚΔ}\,(a',n) = 1$.] Τα στοιχεία $[0], [1], \ldots, [n-1]$ του $\mathbb{Z}_n$ συχνά γράφονται και ως $0, 1, \ldots, n-1$, αντιστοίχως. Έτσι, στον δακτύλιο

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

έχουμε π.χ. $3 + 5 = 1$ και $4 \cdot 6 = 3$.

Θεώρημα 2.26 *Σε κάθε δακτύλιο ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $(a_1 + \cdots + a_r)(b_1 + \cdots + b_s) = a_1b_1 + a_1b_2 + \cdots + a_1b_s + a_2b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_2b_s + \cdots + a_rb_1 + a_rb_2 + \cdots + a_rb_s$. *(Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως* ***γενικευμένος επιμεριστικός νόμος****.)*

(ii) $a0 = 0a = 0$.

(iii) $(-a)\,b = a\,(-b) = -\,(ab)$.

(iv) $(-a)\,(-b) = ab$.

(v) $a\,(-1) = (-1)\,a = -a$.

(vi) $a\,(b-c) = ab - ac, \quad (b-c)\,a = ba - ca$.

(vii) $(na)\,b = a\,(nb) = n\,(ab)$, *όπου* $n \in \mathbb{Z}$.

(viii) $(ma)\,(nb) = (mn)\,(ab)$, *όπου* $m, n \in \mathbb{Z}$.

Παρατήρηση 2.27 Αν R είναι ένας από τους δακτυλίους $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, τότε για κάθε $a \in R$ και $n \in \mathbb{Z}$, το πολλαπλάσιο na είναι το σύνηθες γινόμενο των αριθμών n και a.

Άσκηση 2.28 Έστω $n \in \mathbb{Z}^+$. Δείξτε ότι αν $[a] \in \mathbb{Z}_n$ και $m \in \mathbb{Z}$, τότε $m\,[a] = [ma]$.

Θεώρημα 2.29 (διωνυμικό θεώρημα) *Έστω R ένας δακτύλιος και a, b δύο στοιχεία του R τέτοια ώστε $ab = ba$. Τότε*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι ένας δακτύλιος R ικανοποιεί την ισότητα

$$0_R = 1_R$$

αν και μόνον αν ο R αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο. Ένας τέτοιος δακτύλιος λέγεται **τετριμμένος δακτύλιος**.

Έστω R ένας δακτύλιος. Αν υπάρχει $n \in \mathbb{Z}^+$ που να ικανοποιεί

$$n1_R = 0_R,$$

τότε το ελάχιστο τέτοιο n λέγεται **χαρακτηριστική** του R. Στην αντίθετη περίπτωση, η χαρακτηριστική του R είναι (εξ ορισμού) 0.

Παράδειγμα 2.30 Οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ έχουν χαρακτηριστική 0.

Παράδειγμα 2.31 Για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, ο $\mathbb{Z}_n$ έχει χαρακτηριστική n.

Άσκηση 2.32 Δείξτε ότι κάθε δακτύλιος με χαρακτηριστική 0 έχει άπειρο πλήθος στοιχείων.[2]

Άσκηση 2.33 Δείξτε ότι ένας δακτύλιος R έχει χαρακτηριστική 1 αν και μόνον αν ο R είναι τετριμμένος.

Άσκηση 2.34 Έστω R ένας δακτύλιος με χαρακτηριστική n (≥ 0). Δείξτε ότι αν $a \in R$ και $m \in \mathbb{Z}$, τότε $(mn)\,a = 0$.

[2]Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί ένας δακτύλιος με άπειρο πλήθος στοιχείων να έχει χαρακτηριστική $\neq 0$.

2.4 Ακέραιες περιοχές και σώματα

Ένας μη τετριμμένος αντιμεταθετικός δακτύλιος D που ικανοποιεί

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

(για κάθε $a, b \in D$) λέγεται **ακέραια περιοχή**.

Παράδειγμα 2.35 Οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι ακέραιες περιοχές.

Θεώρημα 2.36 *Σε κάθε ακέραια περιοχή ισχύει ο ακόλουθος νόμος διαγραφής για τον πολλαπλασιασμό:* $ab = ac \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$.

Ένας μη τετριμμένος δακτύλιος του οποίου κάθε μη μηδενικό στοιχείο είναι μονάδα λέγεται **δακτύλιος διαίρεσης**. Με άλλα λόγια, ένας μη τετριμμένος δακτύλιος R είναι δακτύλιος διαίρεσης αν και μόνον αν

$$R^* = R - \{0\}.$$

Ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος διαίρεσης λέγεται **σώμα**. (Έτσι, κάθε σώμα F ικανοποιεί $F^* = F - \{0\}$.)

Παράδειγμα 2.37 Οι δακτύλιοι $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι σώματα. Αντίθετα, ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ δεν είναι σώμα.

Θεώρημα 2.38 *Κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή.*

Απόδειξη Έστω F ένα σώμα και a, b στοιχεία του F με $ab = 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $a = 0$ ή $b = 0$. Αν $a = 0$, τελειώσαμε. Αν $a \neq 0$, τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας $ab = 0$ με το a^{-1}, βλέπουμε ότι $b = 0$. ∎

Θεώρημα 2.39 *Κάθε πεπερασμένη ακέραια περιοχή είναι σώμα.*

Απόδειξη Έστω D μια πεπερασμένη ακέραια περιοχή και έστω $a \in D - \{0\}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $b \in D$ τέτοιο ώστε $ab = 1$. Η συνάρτηση $f : D \longrightarrow D$ με τύπο

$$f(x) = ax$$

είναι προφανώς $1 - 1$. Έτσι, αφού η D είναι πεπερασμένη, η f είναι και επί. Συνεπώς υπάρχει $b \in D$ τέτοιο ώστε $f(b) = 1$, δηλαδή $ab = 1$. ∎

Άσκηση 2.40 Έστω $n \in \mathbb{Z}^+$. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_n$ είναι σώμα.

(ii) Ο αριθμός n είναι πρώτος.

Θεώρημα 2.41 *Η χαρακτηριστική κάθε ακέραιας περιοχής (άρα και κάθε σώματος) είναι* 0 *ή ένας πρώτος αριθμός.*

Απόδειξη Έστω D μια ακέραια περιοχή με χαρακτηριστική $n > 0$. Θα δείξουμε ότι ο αριθμός n είναι πρώτος. Επειδή $0_D \neq 1_D$, έχουμε $n > 1$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο n είναι σύνθετος αριθμός, δηλαδή $n = k\ell$ για κάποιους θετικούς ακεραίους $k, \ell < n$. Τότε

$$(k1_D)\,(\ell 1_D) = (k\ell)\,1_D = n1_D = 0_D,$$

και άρα $k1_D = 0_D$ ή $\ell 1_D = 0_D$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού δεν υπάρχει θετικός ακέραιος $m < n$ τέτοιος ώστε $m1_D = 0_D$. ■

Άσκηση 2.42 Έστω p ένας πρώτος αριθμός και D μια ακέραια περιοχή με χαρακτηριστική p. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε ακέραιο k με $0 < k < p$, ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{p}{k}$ είναι πολλαπλάσιο του p. (**Υπόδειξη**: Οι αριθμοί p και $k!\,(p-k)!$ είναι δύο διαιρέτες του $p!$ οι οποίοι έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη 1.)

(ii) $(a+b)^p = a^p + b^p$ για κάθε $a, b \in D$. (**Υπόδειξη**: Διωνυμικό θεώρημα σε συνδυασμό με το (i) και την Άσκηση 2.34.)

(iii) $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ για κάθε $a, b \in D$ και $n \in \mathbb{N}$. (**Υπόδειξη**: Επαγωγή στο n χρησιμοποιώντας το (ii).)

Έστω F ένα σώμα. Αν $a, b \in F$ και $b \neq 0$, ορίζουμε

$$\frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Το στοιχείο $\frac{a}{b}$ (που γράφεται και ως a/b) λέγεται **πηλίκο** του a διά του b.

Θεώρημα 2.43 *Σε κάθε σώμα ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $\frac{a}{1} = a$.

(ii) Αν $a \neq 0$, *τότε* $\frac{1}{a} = a^{-1}$, $\frac{0}{a} = 0$, $\frac{a}{a} = 1$.

(iii) Αν $b \neq 0$, *τότε* $\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = bc$.

(iv) *Αν* $b, d \neq 0$, *τότε* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

(v) *Αν* $b \neq 0$, *τότε* $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ *και* $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.

(vi) *Αν* $b, c \neq 0$, *τότε* $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ *και* $\frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b}$.

(vii) *Αν* $c \neq 0$, *τότε* $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$.

(viii) *Αν* $b, d \neq 0$, *τότε* $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ *και* $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

(ix) *Αν* $a, b \neq 0$, *τότε* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

(x) *Αν* $b, c, d \neq 0$, *τότε* $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$.

Θεώρημα 2.44 *Έστω F ένα σώμα. Για κάθε $a, b \in F^*$ και $m, n \in \mathbb{Z}$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $1^n = 1$ *(δηλαδή $1_F^n = 1_F$).*

(ii) $a^m a^n = a^{m+n}$.

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

(iv) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

(v) $(a^m)^n = a^{mn}$.

(vi) $(ab)^n = a^n b^n$.

(vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Έστω D μια ακέραια περιοχή και $<$ μια ολική διάταξη της D τέτοια ώστε, για κάθε $a, b, c \in D$,

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$

$$a < b \wedge c > 0 \;\Rightarrow\; ac < bc.$$

Τότε η D λέγεται **διατεταγμένη ακέραια περιοχή**. (Σε περίπτωση που η D είναι σώμα, θα λέγεται **διατεταγμένο σώμα**.) Ένα στοιχείο $a \in D$ λέγεται **θετικό** (αντ. **αρνητικό**) αν $a > 0$ (αντ. $a < 0$). Το σύνολο των θετικών στοιχείων της D συμβολίζεται με D^+, δηλαδή

$$D^+ := \{x \in D \mid x > 0\}.$$

Παράδειγμα 2.45 Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι (με τη συνήθη διάταξη) διατεταγμένη ακέραια περιοχή. Επίσης, τα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ είναι διατεταγμένα σώματα.

Θεώρημα 2.46 *Σε κάθε διατεταγμένη ακέραια περιοχή έχουμε:*

(i) $a < b \Leftrightarrow b - a > 0 \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow -a > -b.$

(ii) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0, \quad a < 0 \Leftrightarrow -a > 0.$

(iii) $a < b \wedge c < d \;\Rightarrow\; a + c < b + d.$

(iv) $0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d \;\Rightarrow\; ac < bd.$

(v) $a < b \wedge c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc.$

(vi) $a^2 \geq 0$, *με ισότητα αν και μόνον αν* $a = 0$.

(vii) *Αν* $a, b \geq 0$, *τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες*

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2, \quad a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2, \quad a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$$

(viii) $-1 < 0 < 1.$

(ix) $a - 1 < a < a + 1.$[3]

(x) *Το άθροισμα δύο θετικών στοιχείων είναι θετικό.*

(xi) *Το άθροισμα δύο αρνητικών στοιχείων είναι αρνητικό.*

(xii) *Το γινόμενο δύο θετικών στοιχείων είναι θετικό.*

(xiii) *Το γινόμενο δύο αρνητικών στοιχείων είναι θετικό.*

(xiv) *Το γινόμενο ενός θετικού και ενός αρνητικού στοιχείου είναι αρνητικό.*

Άσκηση 2.47 Δείξτε ότι σε κάθε διατεταγμένη ακέραια περιοχή ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c.$

(ii) $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0 \Leftrightarrow a - b \leq 0 \Leftrightarrow -a \geq -b.$

(iii) $a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq 0.$

[3] Συνεπώς κάθε διατεταγμένη ακέραια περιοχή έχει άπειρο πλήθος στοιχείων.

(iv) $a \leq 0 \Leftrightarrow -a \geq 0$.

(v) $a \leq b \wedge c \leq d \;\Rightarrow\; a + c \leq b + d$.

(vi) $a \leq b \wedge c < d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$.

(vii) $a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge a + b = 0 \;\Rightarrow\; a = b = 0$.

(viii) $a \leq b \wedge c \geq 0 \;\Rightarrow\; ac \leq bc$.

(ix) $a \leq b \wedge c \leq 0 \;\Rightarrow\; ac \geq bc$.

(x) $0 \leq a \leq b \wedge 0 \leq c \leq d \;\Rightarrow\; ac \leq bd$.

Άσκηση 2.48 Δείξτε ότι δεν υπάρχει ολική διάταξη με την οποία το $\mathbb{C}$ να αποτελεί διατεταγμένο σώμα.

Άσκηση 2.49 Δείξτε ότι κάθε διατεταγμένη ακέραια περιοχή έχει χαρακτηριστική 0.

Άσκηση 2.50 Δείξτε ότι το σύνολο D^+ των θετικών στοιχείων μιας διατεταγμένης ακέραιας περιοχής D έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $0 \notin D^+$.

(ii) $(\forall a \in D)\,(a = 0 \vee a \in D^+ \vee -a \in D^+)$.

(iii) $(\forall a, b \in D^+)\,(a + b \in D^+ \wedge ab \in D^+)$.

Αντίστροφα, έστω D μια ακέραια περιοχή και $P \subseteq D$ ένα σύνολο το οποίο έχει τις παραπάνω τρεις ιδιότητες [δηλαδή τα (i), (ii), (iii) ισχύουν με P στη θέση του D^+]. Δείξτε ότι με τη σχέση

$$a < b \;:\Leftrightarrow\; b - a \in P$$

(όπου $a, b \in D$) η D αποτελεί διατεταγμένη ακέραια περιοχή και $D^+ = P$.

Αν D είναι μια διατεταγμένη ακέραια περιοχή και $a \in D$, τότε η **απόλυτη τιμή** $|a|$ του a ορίζεται από την ισότητα

$$|a| := \begin{cases} a & \text{αν } a \geq 0, \\ -a & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

Θεώρημα 2.51 *Σε κάθε διατεταγμένη ακέραια περιοχή έχουμε:*

(i) $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0, \quad |a| = -a \Leftrightarrow a \leq 0.$

(ii) $|a| \geq 0$, *με ισότητα αν και μόνον αν* $a = 0$.

(iii) $|-a| = |a|$.

(iv) $|a - b| = |b - a|$.

(v) $|a|^2 = a^2$.

(vi) $|a| = |b| \ \Leftrightarrow \ a^2 = b^2 \ \Leftrightarrow \ a = b \vee a = -b$.

(vii) $-|a| \leq a \leq |a|$.

(viii) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b, \quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$.

(ix) $|a| > b \ \Leftrightarrow \ a > b \vee a < -b, \quad |a| \geq b \ \Leftrightarrow \ a \geq b \vee a \leq -b$.

(x) $|ab| = |a|\,|b|$.

(xi) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ ***(τριγωνικές ανισότητες)***.

Θεώρημα 2.52 *Σε κάθε διατεταγμένο σώμα έχουμε:*

(i) *Αν* $a \neq 0$, *τότε* $\ a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0 \quad$ *και* $\quad a < 0 \Leftrightarrow a^{-1} < 0$.

(ii) *Αν* $a < b$ *και* $c > 0$, *τότε* $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

(iii) *Αν* $a < b$ *και* $c < 0$, *τότε* $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

(iv) *Αν* $b \neq 0$, *τότε* $\ \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0 \quad$ *και* $\quad \frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow ab < 0$.

(v) *Αν* $0 < a < b$, *τότε* $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

(vi) *Αν* $b \neq 0$, *τότε* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

(vii) *Αν* $a < b$, *τότε* $a < \frac{a+b}{2} < b$, *όπου* 2 *είναι το στοιχείο* $1 + 1$ *του διατεταγμένου σώματος.*

(viii) *Το πηλίκο δύο θετικών στοιχείων είναι θετικό.*

(ix) *Το πηλίκο δύο αρνητικών στοιχείων είναι θετικό.*

(x) *Το πηλίκο ενός θετικού διά ενός αρνητικού στοιχείου είναι αρνητικό.*

(xi) *Το πηλίκο ενός αρνητικού διά ενός θετικού στοιχείου είναι αρνητικό.*

2.5 Υποδομές

Τα μονοειδή, οι ομάδες, οι δακτύλιοι και τα σώματα είναι μερικά βασικά είδη αλγεβρικών δομών. Στις δομές αυτές αντιστοιχούν διάφορες "υποδομές", οι οποίες ορίζονται ως εξής:

- Έστω M ένα μονοειδές (με πολλαπλασιαστικό συμβολισμό). Ένα υποσύνολο $N \subseteq M$ λέγεται **υπομονοειδές** του M αν $1 \in N$ και το N είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό του M (δηλαδή $a, b \in N \Rightarrow ab \in N$).

- Έστω G μια ομάδα. Ένα υποσύνολο $H \subseteq G$ λέγεται **υποομάδα** της G αν το H είναι υπομονοειδές της G και επιπλέον το H είναι κλειστό ως προς τα αντίστροφα στοιχεία (δηλαδή $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$).

- Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα υποσύνολο $S \subseteq R$ λέγεται **υποδακτύλιος** του R αν το S είναι υποομάδα του R ως προς την πρόσθεση, καθώς επίσης και υπομονοειδές του R ως προς τον πολλαπλασιασμό.

- Έστω F ένα σώμα. Ένα υποσύνολο $K \subseteq F$ λέγεται **υπόσωμα** του F αν το K είναι υποδακτύλιος του F και επιπλέον το K είναι κλειστό ως προς τα αντίστροφα στοιχεία (δηλαδή $a \in K - \{0\} \Rightarrow a^{-1} \in K$).

Παράδειγμα 2.53 Τα υποσύνολα $\{1\}$, M και M^* οποιουδήποτε μονοειδούς M είναι υπομονοειδή.

Παράδειγμα 2.54 Το σύνολο $\mathbb{Z}^+$ είναι υπομονοειδές του πολλαπλασιαστικού μονοειδούς $\mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 2.55 Τα υποσύνολα $\{1\}$ και G οποιασδήποτε ομάδας G είναι υποομάδες.

Παράδειγμα 2.56 Το σύνολο $\mathbb{R}^+$ (αντ. $\mathbb{Q}^+$) είναι υποομάδα της πολλαπλασιαστικής ομάδας $\mathbb{R}^*$ (αντ. $\mathbb{Q}^*$).

Παράδειγμα 2.57 Τα σύνολα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ είναι υποομάδες της προσθετικής ομάδας $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 2.58 Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$n\mathbb{Z} := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

είναι υποομάδα της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Z}$. Αντίστροφα, είναι εύκολο να δούμε ότι αν H είναι μια υποομάδα της $\mathbb{Z}$, τότε $H = n\mathbb{Z}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. (**Υπόδειξη**: Αν $H \neq \{0\}$, όπου H υποομάδα της $\mathbb{Z}$, τότε το σύνολο $H \cap \mathbb{Z}^+$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο n.)

Παράδειγμα 2.59 Τα σύνολα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι υποδακτύλιοι του $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 2.60 Το σύνολο $\mathbb{Z}$ είναι ο μόνος υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}$. (Κάθε δακτύλιος φυσικά είναι υποδακτύλιος του εαυτού του.)

Παράδειγμα 2.61 Για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, το σύνολο $\mathbb{Z}_n$ είναι ο μόνος υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}_n$.

Παράδειγμα 2.62 Το $\left\{m + n\sqrt{5} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.63 Το $\{m + ni \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 2.64 Το $\mathbb{R}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 2.65 Τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\left\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\}$ είναι υποσώματα του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.66 Το μόνο υπόσωμα του $\mathbb{Q}$ είναι το $\mathbb{Q}$.

Παράδειγμα 2.67 Για κάθε πρώτο αριθμό p, το μόνο υπόσωμα του $\mathbb{Z}_p$ είναι το $\mathbb{Z}_p$. (Δείτε Άσκηση 2.40.)

Άσκηση 2.68 Έστω G μια ομάδα και H ένα μη κενό υποσύνολο της G. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Το H είναι υποομάδα της G.

(ii) Το H είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό της G και ως προς τα αντίστροφα στοιχεία.

(iii) $(\forall a, b \in H)\left(ab^{-1} \in H\right)$.

Άσκηση 2.69 Έστω G μια ομάδα και H ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο της G. Δείξτε ότι το H είναι υποομάδα της G αν και μόνον αν το H είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό της G.

Θεώρημα 2.70 *Κάθε υπομονοειδές ενός μονοειδούς M είναι μονοειδές (με την πράξη που κληρονομεί από το M). Ομοίως, κάθε υποομάδα μιας ομάδας είναι ομάδα, κάθε υποδακτύλιος ενός δακτυλίου είναι δακτύλιος, και κάθε υπόσωμα ενός σώματος είναι σώμα.*

Θεώρημα 2.71 *Κάθε υποδακτύλιος μιας ακέραιας περιοχής (άρα και κάθε υποδακτύλιος ενός σώματος) είναι ακέραια περιοχή. Επίσης, κάθε υποδακτύλιος μιας διατεταγμένης ακέραιας περιοχής είναι διατεταγμένη ακέραια περιοχή.*

Άσκηση 2.72 Έστω R ένας δακτύλιος με χαρακτηριστική n (≥ 0). Δείξτε ότι κάθε υποδακτύλιος του R έχει χαρακτηριστική n.

Θεώρημα 2.73 *Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υπομονοειδών ενός μονοειδούς M. Τότε η τομή $\bigcap \mathcal{F}$ είναι υπομονοειδές του M. (Συμφωνούμε ότι αν $\mathcal{F} = \varnothing$, τότε $\bigcap \mathcal{F} = M$.) Ομοίως, η τομή μιας οικογένειας υποομάδων (αντ. υποδακτυλίων, υποσωμάτων) είναι υποομάδα (αντ. υποδακτύλιος, υπόσωμα).*

Έστω M ένα μονοειδές και $A \subseteq M$. Η τομή N όλων των υπομονοειδών του M που περιέχουν το A (ως υποσύνολο) είναι το μικρότερο υπομονοειδές του M που περιέχει το A. Λέμε ότι το N **παράγεται** από το A, καθώς επίσης και ότι το A είναι **παράγον σύνολο** ή **σύνολο γεννητόρων** του N. Ομοίως για ομάδες, δακτυλίους και σώματα.

Θεώρημα 2.74 *Έστω G μια ομάδα και H η υποομάδα που παράγεται από ένα σύνολο $A \subseteq G$. Τότε τα στοιχεία της H είναι ακριβώς όλα τα πεπερασμένα γινόμενα*

$$a_1^{n_1} \cdots a_r^{n_r},$$

όπου $a_i \in A$ και $n_i \in \mathbb{Z}$. (Στα γινόμενα αυτά συμπεριλαμβάνεται το "κενό γινόμενο", το οποίο εξ ορισμού είναι ίσο με το ταυτοτικό στοιχείο 1 της G.)

Θεώρημα 2.75 *Έστω R ένας δακτύλιος και S ο υποδακτύλιος που παράγεται από ένα σύνολο $A \subseteq R$. Τότε τα στοιχεία του S είναι ακριβώς όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα*

$$n_1 p_1 + \cdots + n_r p_r,$$

όπου $n_i \in \mathbb{Z}$ και p_i είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο στοιχείων του A. (Συμφωνούμε ότι το κενό άθροισμα στοιχείων του R ισούται με 0_R, ενώ το κενό γινόμενο στοιχείων του R ισούται με 1_R.)

Θεώρημα 2.76 *Έστω F ένα σώμα και K το υπόσωμα που παράγεται από έναν υποδακτύλιο $R \subseteq F$. Τότε $K = \{x/y : x, y \in R \wedge y \neq 0\}$.*

Ο μικρότερος υποδακτύλιος ενός δακτυλίου R (δηλαδή η τομή όλων των υποδακτυλίων του R) συμβολίζεται με

$$\mathbb{Z}_R$$

και λέγεται **πρώτος υποδακτύλιος** του R. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\mathbb{Z}_R = \{n1_R : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Επίσης, ο $\mathbb{Z}_R$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος (ακόμη και αν ο R δεν είναι αντιμεταθετικός).

Παράδειγμα 2.77 Αν R είναι ένας από τους δακτυλίους $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, τότε $\mathbb{Z}_R = \mathbb{Z}$.

Το μικρότερο υπόσωμα ενός σώματος F (δηλαδή η τομή όλων των υποσωμάτων του F) συμβολίζεται με

$$\mathbb{Q}_F$$

και λέγεται **πρώτο υπόσωμα** του F. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\mathbb{Q}_F = \{x/y : x, y \in \mathbb{Z}_F \wedge y \neq 0\},$$

δηλαδή το $\mathbb{Q}_F$ παράγεται από τον πρώτο υποδακτύλιο $\mathbb{Z}_F$.

Παράδειγμα 2.78 Αν F είναι ένα από τα σώματα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, τότε $\mathbb{Q}_F = \mathbb{Q}$.

2.6 Ομομορφισμοί

Έστω M και N δύο μονοειδή. Δίνουμε τους εξής ορισμούς:

- Μια συνάρτηση $f : M \longrightarrow N$ λέγεται **ομομορφισμός** αν

  $$f(1) = 1 \quad [\text{δηλαδή } f(1_M) = 1_N]$$

  και

  $$f(ab) = f(a) f(b)$$

  για κάθε $a, b \in M$.

- Ένας ομομορφισμός $f : M \longrightarrow N$ ο οποίος είναι $1-1$ λέγεται **μονομορφισμός** ή **εμφύτευση** του M στο N.

- Ένας ομομορφισμός $f : M \longrightarrow N$ ο οποίος είναι επί λέγεται **επιμορφισμός**.
- Ένας ομομορφισμός $f : M \longrightarrow N$ ο οποίος είναι $1-1$ και επί λέγεται **ισομορφισμός**.
- Ένας ομομορφισμός $f : M \longrightarrow M$ λέγεται **ενδομορφισμός** του M.
- Ένας ισομορφισμός $f : M \longrightarrow M$ λέγεται **αυτομορφισμός** του M.
- Αν υπάρχει ισομορφισμός $f : M \longrightarrow N$, τότε γράφουμε $M \cong N$ και λέμε ότι τα μονοειδή M και N είναι **ισόμορφα**.

Επειδή κάθε ομάδα είναι μονοειδές, οι παραπάνω έννοιες έχουν αυτομάτως νόημα και για τις ομάδες. Αξίζει όμως να σημειώσουμε ότι μια συνάρτηση $f : G \longrightarrow H$ μεταξύ δύο ομάδων G, H είναι ομομορφισμός αν και μόνον αν

$$f(ab) = f(a) f(b)$$

για κάθε $a, b \in G$. [Με άλλα λόγια, η ισότητα $f(1) = 1$ είναι συνέπεια της προηγούμενης συνθήκης.]

Έστω R, S δύο δακτύλιοι. Μια συνάρτηση $f : R \longrightarrow S$ λέγεται **ομομορφισμός δακτυλίων** (ή απλά **ομομορφισμός**) αν η f είναι ταυτοχρόνως ομομορφισμός των ομάδων $\langle R, +\rangle, \langle S, +\rangle$ και ομομορφισμός των μονοειδών $\langle R, \cdot\rangle, \langle S, \cdot\rangle$. Με άλλα λόγια, η f είναι ομομορφισμός αν ικανοποιεί

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(ab) = f(a) f(b), \quad f(1) = 1,$$

όπου $a, b \in R$. [Αν η f είναι ομομορφισμός, τότε φυσικά ισχύει και η ισότητα $f(0) = 0$.] Οι έννοιες του **μονομορφισμού**, **επιμορφισμού**, κτλ. για δακτυλίους ορίζονται όπως και για τα μονοειδή.

Έστω D, E δύο διατεταγμένες ακέραιες περιοχές. Μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : D \longrightarrow E$ η οποία επιπλέον είναι και ομομορφισμός δακτυλίων λέγεται **διαταξιακή εμφύτευση** της D στην E. Κάθε διαταξιακή εμφύτευση προφανώς είναι $1-1$. Αν μια διαταξιακή εμφύτευση $f : D \longrightarrow E$ είναι επί, τότε η f λέγεται **διαταξιακός ισομορφισμός**. Ένας διαταξιακός ισομορφισμός από την D στον εαυτό της λέγεται **διαταξιακός αυτομορφισμός** της D. Τέλος, αν υπάρχει διαταξιακός ισομορφισμός από την D στην E, τότε οι D και E λέγονται **διαταξιακά ισόμορφες**.

Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 2.79 Έστω M ένα μονοειδές και $a \in M$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$ με τύπο

$$f(n) = a^n.$$

Έχουμε

$$f(0) = a^0 = 1$$

και

$$f(m+n) = a^{m+n} = a^m a^n = f(m) f(n)$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Έτσι, η f είναι ομομορφισμός από το μονοειδές $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ στο μονοειδές M.

Παράδειγμα 2.80 Έστω G μια ομάδα και $a \in G$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ με τύπο

$$f(n) = a^n$$

είναι ομομορφισμός ομάδων. (Η πράξη της ομάδας $\mathbb{Z}$ είναι φυσικά η συνήθης πρόσθεση.)

Παράδειγμα 2.81 Η εκθετική συνάρτηση $x \mapsto e^x$ είναι ισομορφισμός από την ομάδα $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ στην ομάδα $\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$.

Παράδειγμα 2.82 Έστω R ένας δακτύλιος. Η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ με τύπο

$$f(n) = n 1_R$$

είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

Παράδειγμα 2.83 Η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(z) = \overline{z}$$

(όπου $\overline{z}$ ο συζυγής του z) είναι αυτομορφισμός του σώματος $\mathbb{C}$.

Θεώρημα 2.84 *Έχουμε:*

(i) Η ταυτοτική συνάρτηση πάνω σε ένα μονοειδές ή πάνω σε έναν δακτύλιο είναι αυτομορφισμός.

(ii) Η ταυτοτική συνάρτηση πάνω σε μία διατεταγμένη ακέραια περιοχή είναι διαταξιακός αυτομορφισμός.

(iii) *Η σύνθεση δύο ομομορφισμών μεταξύ μονοειδών ή δακτυλίων είναι ομομορφισμός.*

(iv) *Η σύνθεση δύο διαταξιακών εμφυτεύσεων είναι διαταξιακή εμφύτευση.*

(v) *Αν f είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ δύο μονοειδών ή δύο δακτυλίων, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι ισομορφισμός.*

(vi) *Αν f είναι ένας διαταξιακός ισομορφισμός, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι διαταξιακός ισομορφισμός.*

Θεώρημα 2.85 *Έστω $f : M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός μονοειδών. Τότε:*

(i) $f(a^n) = f(a)^n$ *για κάθε* $a \in M$ *και* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f[M^*] \subseteq N^*$ *και* $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ *για κάθε* $a \in M^*$.

(iii) *Η συνάρτηση* $f \restriction M^* : M^* \longrightarrow N^*$ *είναι ομομορφισμός ομάδων.*

(iv) *Για κάθε υπομονοειδές A του M, το $f[A]$ είναι υπομονοειδές του N.*

(v) *Για κάθε υπομονοειδές B του N, το $f^{-1}[B]$ είναι υπομονοειδές του M.*

Θεώρημα 2.86 *Έστω $f : G \longrightarrow H$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε:*

(i) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ *για κάθε* $a \in G$.

(ii) $f(a^n) = f(a)^n$ *για κάθε* $a \in G$ *και* $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) *Για κάθε υποομάδα A της G, το $f[A]$ είναι υποομάδα της H.*

(iv) *Για κάθε υποομάδα B της H, το $f^{-1}[B]$ είναι υποομάδα της G.*

Θεώρημα 2.87 *Έστω $f : R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε:*

(i) $f(-a) = -f(a)$ *για κάθε* $a \in R$.

(ii) $f(a-b) = f(a) - f(b)$ *για κάθε* $a, b \in R$.

(iii) $f(na) = nf(a)$ *για κάθε* $a \in R$ *και* $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) $f(a^n) = f(a)^n$ *για κάθε* $a \in R$ *και* $n \in \mathbb{N}$.

(v) $f[R^*] \subseteq S^*$ *και* $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ *για κάθε* $a \in R^*$.

(vi) *Η συνάρτηση* $f \restriction R^* : R^* \longrightarrow S^*$ *είναι ομομορφισμός ομάδων.*

(vii) $f[\mathbb{Z}_R] = \mathbb{Z}_S$.

(viii) *Η συνάρτηση* $f\restriction\mathbb{Z}_R : \mathbb{Z}_R \longrightarrow \mathbb{Z}_S$ *είναι επιμορφισμός δακτυλίων.*

(ix) *Για κάθε υποδακτύλιο* A *του* R*, το* $f[A]$ *είναι υποδακτύλιος του* S.

(x) *Για κάθε υποδακτύλιο* B *του* S*, το* $f^{-1}[B]$ *είναι υποδακτύλιος του* R.

Θεώρημα 2.88 *Έστω* R *ένας δακτύλιος. Η συνάρτηση* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ *που ορίζεται από τον τύπο*

$$f(n) = n1_R$$

είναι ο μοναδικός ομομορφισμός από τον $\mathbb{Z}$ *στον* R*. Επίσης,* $\operatorname{ran}(f) = \mathbb{Z}_R$*. Αν ο* R *έχει χαρακτηριστική* 0*, τότε η* f *είναι ισομορφισμός από τον* $\mathbb{Z}$ *στον* $\mathbb{Z}_R$*, και άρα* $\mathbb{Z}_R \cong \mathbb{Z}$ *(δηλαδή ο* $\mathbb{Z}_R$ *είναι ισόμορφος με τον* $\mathbb{Z}$*).*

Άσκηση 2.89 Έστω R ένας δακτύλιος με χαρακτηριστική $n > 0$, και έστω $f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow R$ η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$f([k]) = k1_R.$$

Δείξτε ότι:

(i) Η f είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή $[k] = [\ell] \Rightarrow k1_R = \ell 1_R$.

(ii) Η f είναι ο μοναδικός ομομορφισμός από τον $\mathbb{Z}_n$ στον R.

(iii) Η f είναι ισομορφισμός από τον $\mathbb{Z}_n$ στον $\mathbb{Z}_R$, και άρα $\mathbb{Z}_R \cong \mathbb{Z}_n$.

Άσκηση 2.90 Έστω R και S δύο δακτύλιοι. Δείξτε ότι αν υπάρχει ομομορφισμός $f : R \longrightarrow S$, τότε η χαρακτηριστική του S διαιρεί τη χαρακτηριστική του R.

Θεώρημα 2.91 *Έστω* $f : F \longrightarrow K$ *ένας ομομορφισμός σωμάτων. Τότε:*

(i) *Ο* f *είναι εμφύτευση (δηλαδή* $1-1$*).*

(ii) $f\left(a^{-1}\right) = f(a)^{-1}$ *για κάθε* $a \in F$ *με* $a \neq 0$.

(iii) $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{f(a)}{f(b)}$ *για κάθε* $a, b \in F$ *με* $b \neq 0$.

(iv) *Η συνάρτηση* $f\restriction\mathbb{Z}_F : \mathbb{Z}_F \longrightarrow \mathbb{Z}_K$ *είναι ισομορφισμός δακτυλίων, και άρα* $\mathbb{Z}_F \cong \mathbb{Z}_K$.

(v) $f[\mathbb{Q}_F] = \mathbb{Q}_K$.

(vi) *Η συνάρτηση* $f{\restriction}\mathbb{Q}_F : \mathbb{Q}_F \longrightarrow \mathbb{Q}_K$ *είναι ισομορφισμός σωμάτων, και άρα* $\mathbb{Q}_F \cong \mathbb{Q}_K$.

(vii) *Για κάθε υπόσωμα* A *του* F*, το* $f[A]$ *είναι υπόσωμα του* K.

(viii) *Για κάθε υπόσωμα* B *του* K*, το* $f^{-1}[B]$ *είναι υπόσωμα του* F.

Άσκηση 2.92 Έστω F ένα σώμα με χαρακτηριστική 0, και $f : \mathbb{Q} \longrightarrow F$ η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m1_F}{n1_F},$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Δείξτε ότι:

(i) Η f είναι καλώς ορισμένη.

(ii) Η f είναι ο μοναδικός ομομορφισμός από το $\mathbb{Q}$ στο F.

(iii) Η f είναι ισομορφισμός από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{Q}_F$, και άρα $\mathbb{Q}_F \cong \mathbb{Q}$.

Άσκηση 2.93 Δείξτε ότι αν F είναι ένα σώμα με χαρακτηριστική p, όπου p πρώτος, τότε $\mathbb{Q}_F = \mathbb{Z}_F \cong \mathbb{Z}_p$.

2.7 Σχέσεις ισοτιμίας

Έστω S μια ημιομάδα, η οποία μπορεί ειδικότερα να είναι μονοειδές ή ομάδα, και έστω $\equiv$ μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στην S. Αν

$$a \equiv a' \wedge b \equiv b' \;\Rightarrow\; ab \equiv a'b'$$

για κάθε $a, a', b, b' \in S$, τότε η $\equiv$ λέγεται **σχέση ισοτιμίας**.

Έστω R ένας δακτύλιος και $\equiv$ μια σχέση ισοδυναμίας πάνω στον R. Αν

$$a \equiv a' \wedge b \equiv b' \;\Rightarrow\; a + b \equiv a' + b' \wedge ab \equiv a'b'$$

για κάθε $a, a', b, b' \in R$ (δηλαδή η $\equiv$ είναι σχέση ισοτιμίας τόσο για την ομάδα $\langle R, +\rangle$ όσο και για το μονοειδές $\langle R, \cdot\rangle$), τότε η $\equiv$ λέγεται **σχέση ισοτιμίας για τον δακτύλιο** R.

Θεώρημα 2.94 *Έστω* $\equiv$ *μια σχέση ισοτιμίας πάνω σε μια ημιομάδα* S*. Τότε η πράξη*

$$[a]\,[b] := [ab]$$

πάνω στο σύνολο πηλίκο $S/\equiv$ *είναι καλώς ορισμένη, και με την πράξη αυτή το* $S/\equiv$ *αποτελεί ημιομάδα (**ημιομάδα πηλίκο**). Επιπλέον, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν η S είναι αντιμεταθετική, τότε και η $S/\equiv$ είναι αντιμεταθετική.*

(ii) *Αν η S είναι μονοειδές, τότε η $S/\equiv$ είναι μονοειδές και η προβολή $a \mapsto [a]$ από το S στο $S/\equiv$ είναι επιμορφισμός μονοειδών.*

(iii) *Αν η S είναι ομάδα, τότε η $S/\equiv$ είναι ομάδα (και έτσι η προβολή $a \mapsto [a]$ είναι επιμορφισμός ομάδων).*

Παράδειγμα 2.95 Για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$, θέτουμε

$$a \equiv b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}.$$

Τότε η $\equiv$ είναι σχέση ισοτιμίας πάνω στην (προσθετική) ομάδα $\mathbb{Q}$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει η ομάδα πηλίκο $\mathbb{Q}/\equiv$, η οποία συνήθως γράφεται ως

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Η $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ λέγεται **ομάδα των ρητών modulo 1**.

Θεώρημα 2.96 *Έστω $\equiv$ μια σχέση ισοτιμίας πάνω σε έναν δακτύλιο R. Τότε οι πράξεις*

$$[a] + [b] := [a + b]\,, \quad [a]\,[b] := [ab]$$

*πάνω στο σύνολο πηλίκο $R/\equiv$ είναι καλώς ορισμένες, και με τις πράξεις αυτές το $R/\equiv$ αποτελεί δακτύλιο (**δακτύλιος πηλίκο**). Επίσης, η προβολή $a \mapsto [a]$ από τον R στον $R/\equiv$ είναι επιμορφισμός δακτυλίων.*

Παράδειγμα 2.97 Έστω $n \in \mathbb{Z}^+$. Η ισοτιμία modulo n είναι πράγματι μία σχέση ισοτιμίας πάνω στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$, και ο δακτύλιος πηλίκο που προκύπτει είναι ο $\mathbb{Z}_n$.

2.8 Ιδεώδη

Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα σύνολο $U \subseteq R$ λέγεται **ιδεώδες** του R αν το U είναι υποομάδα της ομάδας $\langle R, + \rangle$ και

$$(\forall r \in R)\,(\forall u \in U)\,(ru \in U \wedge ur \in U)\,.$$

Παράδειγμα 2.98 Για κάθε δακτύλιο R, τα σύνολα $\{0_R\}$ και R είναι ιδεώδη του R. Αν ο R είναι μη τετριμμένος και δεν έχει άλλα ιδεώδη εκτός από τα $\{0_R\}$ και R, τότε ο R λέγεται **απλός δακτύλιος**.

Παράδειγμα 2.99 Τα ιδεώδη του $\mathbb{Z}$ ταυτίζονται με τις υποομάδες της $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Με άλλα λόγια, ένα σύνολο $U \subseteq \mathbb{Z}$ είναι ιδεώδες του $\mathbb{Z}$ αν και μόνον αν $U = n\mathbb{Z}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2.100 Έστω $f : R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε το σύνολο

$$\ker f := \{x \in R : f(x) = 0_S\}$$

είναι ιδεώδες του R. Το $\ker f$ λέγεται **πυρήνας** του f, ενώ το σύνολο

$$\operatorname{im} f := \operatorname{ran}(f) = f[R]$$

(που είναι υποδακτύλιος του S) λέγεται **εικόνα** του f. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν $\ker f = \{0_R\}$.

Άσκηση 2.101 Έστω R ένας δακτύλιος με χαρακτηριστική n (≥ 0), και έστω $f : \mathbb{Z} \longrightarrow R$ ο μοναδικός ομομορφισμός από τον $\mathbb{Z}$ στον R. Δείξτε ότι $\ker f = n\mathbb{Z}$.

Άσκηση 2.102 Έστω R ένας δακτύλιος, S ένας υποδακτύλιος του R, και U ένα ιδεώδες του R. Δείξτε ότι:

(i) Το σύνολο $S \cap U$ είναι ιδεώδες του S. (Ειδική περίπτωση: Αν $U \subseteq S$, τότε το U είναι ιδεώδες του S.)

(ii) Το σύνολο

$$S + U := \{s + u : s \in S \wedge u \in U\}$$

είναι υποδακτύλιος του R και το U είναι ιδεώδες του $S + U$.

Έστω R ένας δακτύλιος. Η τομή μιας οποιασδήποτε οικογένειας ιδεωδών του R είναι ιδεώδες του R. Ειδικότερα, η τομή όλων των ιδεωδών του R τα οποία περιέχουν ένα δοθέν σύνολο $X \subseteq R$ είναι το μικρότερο ιδεώδες που περιέχει το X. Το ιδεώδες αυτό (που λέμε ότι **παράγεται** από το X) συμβολίζεται με (X), δηλαδή

$$(X) := \bigcap \{U : U \text{ είναι ιδεώδες του } R \text{ και } X \subseteq U\}.$$

Αν $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, τότε αντί για (X) συνήθως γράφουμε

$$(x_1, \ldots, x_n).$$

Θεώρημα 2.103 *Έστω R ένας δακτύλιος και $X \subseteq R$. Τότε τα στοιχεία του (X) είναι ακριβώς όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα*

$$r_1 x_1 r_1' + \cdots + r_n x_n r_n',$$

όπου $r_i, r_i' \in R$ και $x_i \in X$.

Άσκηση 2.104 Δείξτε ότι αν R είναι ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος και $x_1, \ldots, x_n \in R$, τότε

$$(x_1, \ldots, x_n) = \{r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n : r_i \in R\}.$$

Έστω R ένας δακτύλιος και U ένα ιδεώδες του R. Αν για κάθε $x, y \in R$ θέσουμε

$$x \overset{U}{\equiv} y :\Leftrightarrow x - y \in U,$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η $\overset{U}{\equiv}$ είναι μια σχέση ισοτιμίας πάνω στον R. Η κλάση ισοδυναμίας του x είναι το σύνολο $\{x + u : u \in U\}$ το οποίο θα συμβολίζεται με $x + U$, δηλαδή

$$x + U := \{x + u : u \in U\} = \left\{ y \in R : y \overset{U}{\equiv} x \right\}.$$

Επίσης, θέτουμε

$$R/U := R/\overset{U}{\equiv} = \{x + U : x \in R\}.$$

Το R/U αποτελεί δακτύλιο ως προς τις πράξεις

$$(x + U) + (y + U) = (x + y) + U$$

και

$$(x + U)(y + U) = (xy) + U.$$

Ο δακτύλιος αυτός λέγεται **δακτύλιος πηλίκο** του R διά του ιδεώδους U. (Αν ο R είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος, τότε προφανώς και ο R/U είναι αντιμεταθετικός.) Η προβολή

$$\pi : R \longrightarrow R/U$$

του R στον R/U [όπου $\pi(x) = x + U$ για κάθε $x \in R$] είναι επιμορφισμός δακτυλίων με πυρήνα U (δηλαδή $\ker \pi = U$). Αν $A \subseteq R$, τότε το σύνολο $\pi[A]$ γράφεται και ως A/U, δηλαδή

$$A/U := \pi[A] = \{x + U : x \in A\}.$$

Παράδειγμα 2.105 Για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_n$ ταυτίζεται με τον δακτύλιο πηλίκο $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ του $\mathbb{Z}$ διά του ιδεώδους $n\mathbb{Z}$.

Άσκηση 2.106 Έστω R ένας δακτύλιος και U ένα ιδεώδες του R. Δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $0_{R/U} = 0_R + U = U$.

(ii) $1_{R/U} = 1_R + U$.

(iii) $-(x+U) = (-x) + U$ για κάθε $x \in R$.

(iv) $(x+U) - (y+U) = (x-y) + U$ για κάθε $x, y \in R$.

(v) $n(x+U) = (nx) + U$ για κάθε $x \in R$ και $n \in \mathbb{Z}$.

(vi) $(x+U)^n = (x^n) + U$ για κάθε $x \in R$ και $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 2.107 Έστω R ένας δακτύλιος και U, V δύο ιδεώδη του R τέτοια ώστε $U \subseteq V$. Δείξτε ότι το σύνολο V/U είναι ιδεώδες του R/U.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ένας οποιοσδήποτε ομομορφισμός δακτυλίων μπορεί να παραγοντοποιηθεί (δηλαδή να γραφεί ως σύνθεση δύο άλλων ομομορφισμών) με τη βοήθεια ενός κατάλληλου ιδεώδους.

Θεώρημα 2.108 (θεώρημα παραγοντοποίησης)
Έστω $f : R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων και έστω U ένα ιδεώδες του R με $U \subseteq \ker f$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\bar{f} : R/U \longrightarrow S$ τέτοια ώστε

$$\bar{f} \circ \pi = f,$$

όπου $\pi : R \longrightarrow R/U$ είναι η προβολή του R στον R/U. Επιπλέον, ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η $\bar{f}$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων με $\ker \bar{f} = \ker f/U$ και $\operatorname{im} \bar{f} = \operatorname{im} f$.

(ii) Η $\bar{f}$ είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν $U = \ker f$.

Θεώρημα 2.109 (πρώτο θεώρημα ισομορφισμού)
Έστω $f : R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων. Τότε

$$R/\ker f \cong \operatorname{im} f.$$

Απόδειξη Εφαρμόζοντας το θεώρημα παραγοντοποίησης με $U = \ker f$, βλέπουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός

$$\bar{f} : R/\ker f \longrightarrow \operatorname{im} f.$$

■

Άσκηση 2.110 Δείξτε ότι $R/\{0_R\} \cong R$ για κάθε δακτύλιο R.

Θεώρημα 2.111 (δεύτερο θεώρημα ισομορφισμού)
Έστω R ένας δακτύλιος, S ένας υποδακτύλιος του R, και U ένα ιδεώδες του R. Τότε

$$S/(S \cap U) \cong (S + U)/U.$$

(Δείτε Άσκηση 2.102.)

Απόδειξη Έστω $f : S \longrightarrow R/U$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = x + U.$$

(Με άλλα λόγια, η f είναι ο περιορισμός της προβολής $\pi : R \longrightarrow R/U$ στον S.) Η f είναι ομομορφισμός με $\ker f = S \cap U$ και $\operatorname{im} f = (S + U)/U$. Άρα

$$S/(S \cap U) \cong (S + U)/U$$

σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού. ■

Θεώρημα 2.112 (τρίτο θεώρημα ισομορφισμού)
Έστω R ένας δακτύλιος και U, V δύο ιδεώδη του R τέτοια ώστε $U \subseteq V$. Τότε

$$(R/U)/(V/U) \cong R/V.$$

(Δείτε Άσκηση 2.107.)

Απόδειξη Η συνάρτηση $f : R/U \longrightarrow R/V$ που δίνεται από το τύπο

$$f(x + U) = x + V$$

είναι επιμορφισμός δακτυλίων με πυρήνα V/U. Άρα

$$(R/U)/(V/U) \cong R/V$$

σύμφωνα με το πρώτο θεώρημα ισομορφισμού. ■

Θεώρημα 2.113 (θεώρημα αντιστοιχίας)
Έστω $f : R \longrightarrow S$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Τότε ο κανόνας

$$A \mapsto f[A]$$

ορίζει μια αμφίρριψη από το σύνολο όλων των υποδακτυλίων (αντ. ιδεωδών) του R που περιέχουν το $\ker f$ στο σύνολο όλων των υποδακτυλίων (αντ. ιδεωδών) του S.

Ειδική περίπτωση: Έστω R ένας δακτύλιος και U ένα ιδεώδες του R. Τότε ο κανόνας

$$A \mapsto A/U$$

ορίζει μια αμφίρριψη από το σύνολο όλων των υποδακτυλίων (αντ. ιδεωδών) του R που περιέχουν το U στο σύνολο όλων των υποδακτυλίων (αντ. ιδεωδών) του R/U.

Παρατήρηση 2.114 Το θεώρημα αντιστοιχίας είναι γνωστό και ως **τέταρτο θεώρημα ισομορφισμού**.

Έστω R ένας δακτύλιος και U ένα ιδεώδες του R. Ορισμοί:

- Το U λέγεται **γνήσιο ιδεώδες** αν $U \neq R$ (ή ισοδύναμα $1_R \notin U$).
- Το U λέγεται **μεγιστικό ιδεώδες** αν το U είναι γνήσιο ιδεώδες και δεν υπάρχει γνήσιο ιδεώδες V του R τέτοιο ώστε $U \subset V$.

Θεώρημα 2.115 *Έστω R ένας δακτύλιος και U ένα ιδεώδες του R. Τότε:*

(i) Το U είναι γνήσιο αν και μόνον αν ο δακτύλιος R/U είναι μη τετριμμένος.

(ii) Το U είναι μεγιστικό αν και μόνον αν ο δακτύλιος R/U είναι απλός.

Θεώρημα 2.116 *Ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος R είναι απλός αν και μόνον αν ο R είναι σώμα.*

Θεώρημα 2.117 *Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος και U ένα ιδεώδες του R. Τότε το U είναι μεγιστικό αν και μόνον αν ο δακτύλιος R/U είναι σώμα.*

Κεφάλαιο 3

Συστήματα αριθμών

3.1 Συστήματα Peano

Έστω P ένα σύνολο, $s : P \longrightarrow P$ μια μονομελής πράξη πάνω στο P, και 1_P ένα στοιχείο του P, έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

(P1) $(\forall x \in P)\,[s\,(x) \neq 1_P]$.

(P2) $(\forall x, y \in P)\,[x \neq y \Rightarrow s\,(x) \neq s\,(y)]$.

(P3) $(\forall X \subseteq P)\,[1_P \in X \wedge (\forall x \in X)\,(s\,(x) \in X) \ \Rightarrow \ X = P]$.

Τότε η διατεταγμένη τριάδα $\langle P, s, 1_P \rangle$ λέγεται **σύστημα Peano** (με **πράξη διαδοχής** s και **διακεκριμένο στοιχείο** 1_P). Το αξίωμα (**P3**) λέγεται **αρχή της επαγωγής**.

Παράδειγμα 3.1 Έστω ℓ ένας οποιοσδήποτε ακέραιος. Θέτουμε

$$P := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq \ell\}\,, \quad 1_P := \ell$$

και

$$s\,(x) := x + 1$$

για κάθε $x \in P$. Τότε η τριάδα $\langle P, s, 1_P \rangle$ είναι ένα σύστημα Peano.

Παράδειγμα 3.2 Αν θέσουμε

$$P := \left\{2n \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}, \quad 1_P := 2$$

και

$$s\,(x) := x + 2$$

για κάθε $x \in P$, τότε η τριάδα $\langle P, s, 1_P \rangle$ είναι ένα σύστημα Peano.

Παράδειγμα 3.3 Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots$ που ορίζεται ως εξής:

$$\delta_0 := \varnothing, \quad \delta_{n+1} := \delta_n \cup \{\delta_n\}.$$

Έτσι,

$$\delta_n = \{\delta_i \mid i < n\}$$

και

$$m \neq n \Rightarrow \delta_m \neq \delta_n.$$

(Αν $m \neq n$ αλλά $\delta_m = \delta_n$, τότε υπάρχει ένα ελάχιστο k τέτοιο ώστε $\delta_k = \delta_j$ για κάποιο $j < k$, πράγμα που οδηγεί σε άτοπο.) Τώρα, θέτοντας

$$P := \{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad 1_P := \delta_0$$

και

$$s(x) := x \cup \{x\}$$

για κάθε $x \in P$, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η τριάδα $\langle P, s, 1_P \rangle$ είναι ένα σύστημα Peano.

Παρατήρηση 3.4 Έστω $\langle P, s, 1_P \rangle$ ένα σύστημα Peano, και έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$(\forall x \in P)\, \varphi(x),$$

όπου $\varphi(x)$ είναι μια συνθήκη η οποία έχει νόημα για οποιοδήποτε $x \in P$. Τότε, χάρη στο αξίωμα (**P3**), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\varphi(1_P) \wedge (\forall x \in P)\, [\varphi(x) \Rightarrow \varphi(s(x))].$$

Η μέθοδος αυτή λέγεται **απόδειξη με επαγωγή (πάνω) στο** x.

Σε κάθε σύστημα Peano $\langle P, s, 1_P \rangle$ ορίζουμε

$$2_P := s(1_P),$$

$$3_P := s(2_P),$$

$$4_P := s(3_P),$$

κ.ο.κ. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, αντί για

$$1_P,\ 2_P,\ 3_P,\ \dots$$

γράφουμε

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,$$

αντιστοίχως.

Θεώρημα 3.5 *Αν $\langle P, s, 1\rangle$ είναι ένα σύστημα Peano, τότε για κάθε $x \in P$ έχουμε:*

(i) $x \neq 1 \Rightarrow (\exists y \in P)\,[x = s\,(y)]$.

(ii) $s\,(x) \neq x$.

Απόδειξη (i): Με επαγωγή στο x.

(ii): Με επαγωγή στο x, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα (**P1**) και (**P2**). ■

Θεώρημα 3.6 (θεώρημα αναδρομής) *Έστω $\langle P, s, 1\rangle$ ένα σύστημα Peano, W ένα σύνολο, c ένα στοιχείο του W, και $g : P \times W \longrightarrow W$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f : P \longrightarrow W$ τέτοια ώστε*

$$f\,(1) = c$$

και

$$(\forall x \in P)\,[f\,(s\,(x)) = g\,(x, f\,(x))]\,.$$

Απόδειξη Η μοναδικότητα είναι προφανής (με επαγωγή), οπότε αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη. Με τον όρο **αποδεκτή συνάρτηση** θα εννοούμε μια συνάρτηση α η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:

$$\mathrm{dom}\,(\alpha) \subseteq P, \quad \mathrm{ran}\,(\alpha) \subseteq W, \quad 1 \in \mathrm{dom}\,(\alpha)\,, \quad \alpha\,(1) = c$$

και, για κάθε $x \in P$,

$$s\,(x) \in \mathrm{dom}\,(\alpha) \;\Rightarrow\; x \in \mathrm{dom}\,(\alpha) \wedge \alpha\,(s\,(x)) = g\,(x, \alpha\,(x))\,.$$

Το σύνολο $\{\langle 1, c\rangle\}$ είναι αποδεκτή συνάρτηση. Τώρα, έστω $x \in P$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αποδεκτή συνάρτηση α τέτοια ώστε $x \in \mathrm{dom}\,(\alpha)$. Αν $s\,(x) \notin \mathrm{dom}\,(\alpha)$, τότε η

$$\alpha' := \alpha \cup \{\langle s\,(x)\,, g\,(x, \alpha\,(x))\rangle\}$$

είναι μια αποδεκτή συνάρτηση με $s\,(x) \in \mathrm{dom}\,(\alpha')$. Επομένως, χρησιμοποιώντας επαγωγή, κάθε στοιχείο του P ανήκει στο πεδίο ορισμού κάποιας αποδεκτής συνάρτησης. Χρησιμοποιώντας άλλη μία φορά επαγωγή, είναι εύκολο να δούμε ότι αν ένα στοιχείο x του P ανήκει ταυτοχρόνως στα πεδία ορισμού δύο αποδεκτών συναρτήσεων α και β, τότε $\alpha\,(x) = \beta\,(x)$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε

$$f\,(x) := \alpha\,(x)\,,$$

όπου α είναι οποιαδήποτε αποδεκτή συνάρτηση με $x \in \mathrm{dom}\,(\alpha)$. Η συνάρτηση f προφανώς έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. ■

Παρατήρηση 3.7 Έστω $\langle P, s, 1\rangle$ ένα σύστημα Peano, W ένα σύνολο, c ένα στοιχείο του W, και $h : W \longrightarrow W$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f : P \longrightarrow W$ τέτοια ώστε

$$f(1) = c$$

και

$$(\forall x \in P)\left[f(s(x)) = h(f(x))\right].$$

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει αμέσως από το θεώρημα αναδρομής, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $g : P \times W \longrightarrow W$ με $g(x, w) = h(w)$.

Θεώρημα 3.8 *Έστω $\langle P, s, 1\rangle$ ένα σύστημα Peano. Τότε υπάρχει μοναδική διμελής πράξη $\langle x, y\rangle \mapsto x + y$ πάνω στο P τέτοια ώστε*

$$x + 1 = s(x), \quad x + s(y) = s(x + y)$$

για κάθε $x, y \in P$. Η πράξη αυτή (που φυσικά λέγεται πρόσθεση) έχει επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(ii) $x + y = y + x$.

(iii) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$.

(iv) $x + y \neq y$.

(v) $x \neq y \Rightarrow (\exists w \in P)(x + w = y \vee y + w = x)$.

Απόδειξη Σύμφωνα με το θεώρημα αναδρομής (στην εναλλακτική μορφή της Παρατήρησης 3.7), για κάθε $c \in P$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f_c : P \longrightarrow P$ τέτοια ώστε

$$f_c(1) = s(c), \quad f_c(s(y)) = s(f_c(y)).$$

Θέτοντας

$$x + y := f_x(y),$$

έχουμε

$$x + 1 = f_x(1) = s(x)$$

και

$$x + s(y) = f_x(s(y)) = s(f_x(y)) = s(x + y).$$

Η μοναδικότητα της πράξης $\langle x, y\rangle \mapsto x + y$ αφήνεται ως άσκηση.

Όσον αφορά τις αποδείξεις των ιδιοτήτων (i) - (v), θα δώσουμε μόνο ένα σκιαγράφημα.

(i): Με επαγωγή στο z.

(ii): Με επαγωγή στο y, αφού πρώτα δείξουμε (πάλι με επαγωγή) ότι $(\forall x \in P)\,(x + 1 = 1 + x)$.

(iii): Με επαγωγή στο z.

(iv): Με επαγωγή στο y.

(v): Με επαγωγή στο y. ■

Στο εξής, δοθέντος ενός συστήματος Peano $\langle P, s, 1\rangle$, αντί για $s\,(x)$ μπορούμε να γράφουμε $x + 1$.

Θεώρημα 3.9 *Έστω $\langle P, s, 1\rangle$ ένα σύστημα Peano. Τότε υπάρχει μοναδική διμελής πράξη $\langle x, y\rangle \mapsto xy$ πάνω στο P τέτοια ώστε*

$$x1 = x, \quad x\,(y + 1) = xy + x$$

για κάθε $x, y \in P$. Η πράξη αυτή (που λέγεται πολλαπλασιασμός) έχει επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $x\,(y + z) = xy + xz, \quad (y + z)\,x = yx + zx.$

(ii) $x\,(yz) = (xy)\,z.$

(iii) $xy = yx.$

(iv) $xz = yz \Rightarrow x = y.$

Απόδειξη Για κάθε $c \in P$, υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f_c : P \longrightarrow P$ τέτοια ώστε

$$f_c\,(1) = c, \quad f_c\,(y + 1) = f_c\,(y) + c.$$

Θέτοντας

$$xy := f_x\,(y)\,,$$

έχουμε

$$x1 = f_x\,(1) = x$$

και

$$x\,(y + 1) = f_x\,(y + 1) = f_x\,(y) + x = xy + x.$$

Τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. ■

Άσκηση 3.10 Έστω $\langle P, s, 1\rangle$ ένα σύστημα Peano. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική διμελής πράξη $\langle x, y\rangle \mapsto x^y$ πάνω στο P τέτοια ώστε

$$x^1 = x, \quad x^{y+1} = (x^y)\, x$$

για κάθε $x, y \in P$. Επίσης, δείξτε ότι η πράξη αυτή έχει επιπλέον τις εξής ιδιότητες:

(i) $1^x = 1$.

(ii) $x^y x^z = x^{y+z}$.

(iii) $(x^y)^z = x^{yz}$.

(iv) $(xy)^z = x^z y^z$.

Θεώρημα 3.11 *Έστω $\langle P, s, 1\rangle$ ένα σύστημα Peano. Θέτοντας*

$$x < y :\Leftrightarrow (\exists z \in P)\,(x + z = y)\,,$$

όπου $x, y \in P$, έχουμε:

(i) Η $<$ είναι ολική διάταξη του P.

(ii) $(\forall x \in P)\,(1 \leq x)$.

(iii) $(\forall x \in P)\,[x < x + 1 \wedge \neg\,(\exists y \in P)\,(x < y < x + 1)]$.

(iv) $(\forall x, y \in P)\,(x < y \Leftrightarrow x + 1 \leq y)$.

(v) $(\forall x, y \in P)\,(x < y + 1 \Leftrightarrow x \leq y)$.

(vi) Αν $A \subseteq P$ και

$$(\forall x \in P)\,[(\forall y < x)\,(y \in A) \Rightarrow x \in A]\,,$$

*τότε $A = P$ **(αρχή της πλήρους επαγωγής)**.*

(vii) Η $<$ είναι καλή διάταξη.

Απόδειξη (i) - (v): Άσκηση.

(vi): Έστω ότι $A \subseteq P$ και $(\forall x \in P)\,[(\forall y < x)\,(y \in A) \Rightarrow x \in A]$. Επειδή ισχύουν οι τύποι

$$(\forall y < 1)\,(y \in A) \Rightarrow 1 \in A \qquad \text{και} \qquad (\forall y < 1)\,(y \in A)\,,$$

έχουμε $1 \in A$. Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$B := \{x \in P \mid (\forall y \leq x)(y \in A)\}.$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή, είναι εύκολο να δούμε ότι $B = P$. Επομένως $A = P$.

(vii): Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του P το οποίο δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$(\forall x \in P)\left[(\forall y < x)(y \in P - A) \Rightarrow x \in P - A\right].$$

Έτσι, σύμφωνα με την αρχή της πλήρους επαγωγής, $P - A = P$. Αυτό όμως είναι άτοπο (αφού $A \neq \varnothing$). ■

Έστω $\mathfrak{P} = \langle P, s, 1\rangle$ και $\mathfrak{P}' = \langle P', s', 1'\rangle$ δύο συστήματα Peano. Τα $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ λέγονται **ισόμορφα** αν υπάρχει αμφιρριπτική[1] συνάρτηση $f : P \longrightarrow P'$ η οποία ικανοποιεί

$$f(1) = 1'$$

και

$$(\forall x \in P)\left[f(s(x)) = s'(f(x))\right].$$

Μια τέτοια συνάρτηση f λέγεται **ισομορφισμός** από το $\mathfrak{P}$ στο $\mathfrak{P}'$.

Άσκηση 3.12 Έστω $f : P \longrightarrow P'$ ένας ισομορφισμός συστημάτων Peano. Δείξτε ότι ο f διατηρεί την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διάταξη, δηλαδή

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y), \quad x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

για κάθε $x, y \in P$.

Άσκηση 3.13 Δείξτε ότι:

(i) Για κάθε σύστημα Peano $\langle P, s, 1\rangle$, η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id}_P : P \longrightarrow P$ είναι ισομορφισμός.

(ii) Η σύνθεση δύο ισομορφισμών μεταξύ συστημάτων Peano είναι ισομορφισμός.

[1] Η αμφιρριπτικότητα εδώ είναι πλεονασμός. Πράγματι, αν μια συνάρτηση $f : P \longrightarrow P'$ ικανοποιεί $f(1) = 1'$ και $(\forall x \in P)\left[f(s(x)) = s'(f(x))\right]$, τότε με επαγωγή μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $(\forall y \in P')(\exists! x \in P)\left[f(x) = y\right]$, οπότε η f είναι υποχρεωτικά αμφιρριπτική.

(iii) Αν $f : P \longrightarrow P'$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ δύο συστημάτων Peano, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : P' \longrightarrow P$ είναι ισομορφισμός.

Θεώρημα 3.14 *Έστω $\mathfrak{P} = \langle P, s, 1\rangle$ και $\mathfrak{P}' = \langle P', s', 1'\rangle$ δύο οποιαδήποτε συστήματα Peano. Τότε τα $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ είναι ισόμορφα, και μάλιστα υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός από το $\mathfrak{P}$ στο $\mathfrak{P}'$.*

Απόδειξη Το θεώρημα αναδρομής εγγυάται ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f : P \longrightarrow P'$ τέτοια ώστε

$$f(1) = 1'$$

και

$$(\forall x \in P)\left[f(s(x)) = s'(f(x))\right].$$

Η f είναι υποχρεωτικά αμφιρριπτική και άρα ισομορφισμός. ∎

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει ουσιαστικά ένα μόνο σύστημα Peano $\mathfrak{P}$. Το $\mathfrak{P}$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι **το σύστημα των θετικών ακέραιων αριθμών**.

3.2 Ακέραιοι αριθμοί

Έστω R ένας δακτύλιος. Αν ένα υποσύνολο $A \subseteq R$ ικανοποιεί

$$1_R \in A$$

και

$$(\forall x \in A)(x + 1_R \in A),$$

τότε το A λέγεται **επαγωγικό υποσύνολο** του R. Π.χ. κάθε υποδακτύλιος του R είναι επαγωγικό υποσύνολο. Η τομή μιας οικογένειας επαγωγικών υποσυνόλων του R είναι προφανώς ένα επαγωγικό υποσύνολο του R. Η τομή όλων των επαγωγικών υποσυνόλων του R συμβολίζεται με

$$\mathbb{P}_R.$$

Έτσι, $\mathbb{P}_R$ είναι το μικρότερο επαγωγικό υποσύνολο του R.

Παράδειγμα 3.15 Αν R είναι ένας από τους δακτυλίους $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, τότε $\mathbb{P}_R = \mathbb{Z}^+$.

Έστω R ένας δακτύλιος και $\varphi(x)$ μια συνθήκη η οποία έχει νόημα για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{P}_R$. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι

$$\varphi(1_R) \wedge (\forall x \in \mathbb{P}_R)\,[\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x + 1_R)]\,.$$

Τότε το $A = \{x \in \mathbb{P}_R : \varphi(x)\}$ είναι ένα επαγωγικό υποσύνολο του R, και άρα $\mathbb{P}_R \subseteq A$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$(\forall x \in \mathbb{P}_R)\,\varphi(x)\,.$$

Αυτό είναι ένα είδος επαγωγής πάνω στο x.

Θεώρημα 3.16 *Έστω R ένας δακτύλιος. Έχουμε:*

(i) $(\forall x, y \in \mathbb{P}_R)\,(x + y \in \mathbb{P}_R)$.

(ii) $(\forall x, y \in \mathbb{P}_R)\,(xy \in \mathbb{P}_R)$.

(iii) $(\forall x, y \in \mathbb{P}_R)\,(xy = yx)$.

(iv) $(\forall x \in \mathbb{P}_R)\,(x \neq 1_R \Rightarrow x - 1_R \in \mathbb{P}_R)$.

(v) $(\forall x, y \in \mathbb{P}_R)\,(x \neq y \;\Rightarrow\; x - y \in \mathbb{P}_R \vee y - x \in \mathbb{P}_R)$.

(vi) $\mathbb{Z}_R = \mathbb{P}_R \cup \{0_R\} \cup \{-x : x \in \mathbb{P}_R\}$.

(vii) Αν S είναι ένας δακτύλιος και $f : R \longrightarrow S$ είναι ένας ομομορφισμός, τότε $f[\mathbb{P}_R] = \mathbb{P}_S$.

Απόδειξη (i): Με επαγωγή στο y (κρατώντας το x σταθερό).

(ii): Με επαγωγή στο y, χρησιμοποιώντας το (i).

(iii): Με επαγωγή στο y.

(iv): Με επαγωγή στο x.

(v): Με επαγωγή στο y, χρησιμοποιώντας το (iv).

(vi), (vii): Άσκηση. ■

Άσκηση 3.17 Δείξτε ότι $\mathbb{P}_R = \{n 1_R : n \in \mathbb{Z}^+\}$ για κάθε δακτύλιο R.

Αν R είναι ένας δακτύλιος, τότε $s_R : \mathbb{P}_R \longrightarrow \mathbb{P}_R$ είναι η συνάρτηση με

$$s_R(x) := x + 1_R$$

για κάθε $x \in \mathbb{P}_R$.

Θεώρημα 3.18 *Έστω R ένας δακτύλιος. Έχουμε:*

(i) *Το $\langle \mathbb{P}_R, s_R, 1_R \rangle$ ικανοποιεί τα αξιώματα* **(P2)** *και* **(P3)** *ενός συστήματος Peano.*

(ii) *Το $\langle \mathbb{P}_R, s_R, 1_R \rangle$ είναι σύστημα Peano αν και μόνον αν $0_R \notin \mathbb{P}_R$.*

Θεώρημα 3.19 *Έστω D μια διατεταγμένη ακέραια περιοχή. Τότε:*

(i) *Το D^+ είναι επαγωγικό υποσύνολο της D.*

(ii) $\mathbb{P}_D = \mathbb{Z}_D^+$.

(iii) *Το $\langle \mathbb{P}_D, s_D, 1_D \rangle$ είναι σύστημα Peano.*

(iv) *Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός του $\langle \mathbb{P}_D, s_D, 1_D \rangle$ (έτσι όπως ορίζονται σε κάθε σύστημα Peano) συμπίπτουν με τους περιορισμούς πάνω στο $\mathbb{P}_D$ των αντίστοιχων πράξεων της D. Ομοίως και για τη διάταξη.*

Θεώρημα 3.20 *Έστω D μια διατεταγμένη ακέραια περιοχή. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η D δεν έχει γνήσιους υποδακτυλίους.*

(ii) $\mathbb{Z}_D = D$.

(iii) $\mathbb{P}_D = D^+$.

(iv) *Το σύνολο D^+ είναι καλώς διατεταγμένο με τη διάταξη που κληρονομεί από την D.*

Απόδειξη Οι συνεπαγωγές (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) αφήνονται ως άσκηση. Για τη συνεπαγωγή (iv) $\Rightarrow$ (i), έστω ότι το D^+ είναι καλώς διατεταγμένο, και ας υποθέσουμε ότι R είναι ένας γνήσιος υποδακτύλιος της D. Αν διαλέξουμε ένα $a \in D - R$, τότε προφανώς $-a \in D - R$ και ένα από τα $a, -a$ είναι θετικό. Άρα $D^+ - R \neq \varnothing$. Έστω b το ελάχιστο στοιχείο του $D^+ - R$. Αν $1_D < b$, τότε το $b - 1_D$ θα ήταν ένα στοιχείο του $D^+ - R$ μικρότερο του b, πράγμα το οποίο αποκλείεται. Επομένως το b είναι στοιχείο του συνόλου $X := \{x \in D^+ : x < 1_D\}$. Τώρα, έστω c το ελάχιστο στοιχείο του X. Οι ανισότητες $0_D < c < 1_D$ συνεπάγονται ότι

$$0_D < c^2 < c < 1_D.$$

Έτσι, $c^2 \in X$ και $c^2 < c$, το οποίο είναι άτοπο. ∎

Μια διατεταγμένη ακέραια περιοχή που ικανοποιεί τις ισοδύναμες συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος λέγεται **καλώς διατεταγμένη ακέραια περιοχή**.

Θεώρημα 3.21 *Αν D είναι μια οποιαδήποτε διατεταγμένη ακέραια περιοχή, τότε ο υποδακτύλιος $\mathbb{Z}_D$ είναι καλώς διατεταγμένη ακέραια περιοχή.*

Θεώρημα 3.22 *Έστω D μια καλώς διατεταγμένη ακέραια περιοχή. Τότε:*

(i) *Δεν υπάρχουν $x, y \in D$ τέτοια ώστε $x < y < x + 1$ (όπου $1 = 1_D$).*

(ii) $(\forall x, y \in D)\,(x < y \Leftrightarrow x + 1 \leq y)$.

(iii) $(\forall x, y \in D)\,(x < y + 1 \Leftrightarrow x \leq y)$.

Θεώρημα 3.23 *Έστω D μια καλώς διατεταγμένη ακέραια περιοχή με διάταξη $<$. Τότε η $<$ είναι η μόνη διάταξη με την οποία ο δακτύλιος D σχηματίζει διατεταγμένη ακέραια περιοχή.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι εκτός από την $<$ υπάρχει και μια άλλη ολική διάταξη $\lhd$ με την οποία ο D σχηματίζει διατεταγμένη ακέραια περιοχή. Είναι προφανές ότι

$$\{x \in D : 0 < x\} = \mathbb{P}_D \subseteq \{x \in D : 0 \lhd x\},$$

οπότε

$$(\forall x, y \in D)\,(x < y \Leftrightarrow x \lhd y)\,.$$

■

Θεώρημα 3.24 *Έστω $\langle P, s, 1\rangle$ ένα σύστημα Peano. Πάνω στο σύνολο $P \times P$ ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ θέτοντας*

$$\langle x, y\rangle \sim \langle z, w\rangle :\Leftrightarrow x + w = y + z.$$

(Διαισθητικά $\langle x, y\rangle \sim \langle z, w\rangle \Leftrightarrow x - y = z - w$, αλλά αυτό βέβαια είναι ανεπίσημο αφού το P δεν διαθέτει πράξη αφαίρεσης.) Έστω

$$D := \{[x, y] : \langle x, y\rangle \in P \times P\}$$

το σύνολο πηλίκο του $P \times P$ διά της $\sim$, όπου $[x, y]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $\langle x, y\rangle$. Τότε το D εφοδιασμένο με την παρακάτω δομή αποτελεί καλώς διατεταγμένη ακέραια περιοχή:

(i) $[x,y]+[z,w] := [x+z,\ y+w]$.

(ii) $0_D := [1,1]$.

(iii) $-[x,y] := [y,x]$.

(iv) $[x,y]\,[z,w] := [xz+yw,\ xw+yz]$.

(v) $1_D := [2,1]$.

(vi) $[x,y] < [z,w] :\Leftrightarrow x+w < y+z$.

Απόδειξη Το να δούμε ότι το D αποτελεί μη τετριμμένο αντιμεταθετικό δακτύλιο είναι υπόθεση ρουτίνας. Έστω τώρα ότι

$$[x,y]\,[z,w] = 0_D, \quad [x,y] \neq 0_D,$$

δηλαδή

$$xz+yw = xw+yz, \quad x \neq y.$$

Επειδή υπάρχει ένα $t \in P$ τέτοιο ώστε

$$x+t = y \vee y+t = x,$$

η ισότητα $xz+yw = xw+yz$ δίνει $z = w$, δηλαδή

$$[z,w] = 0_D.$$

Συνεπώς ο δακτύλιος D είναι ακέραια περιοχή. Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι ο D είναι διατεταγμένη ακέραια περιοχή. Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι το σύνολο D^+ είναι καλώς διατεταγμένο. Για τον σκοπό αυτόν, θεωρούμε τη συνάρτηση $h : P \longrightarrow D^+$ με τύπο

$$h\,(x) = [x+1,1]\,.$$

Η h είναι αμφιρριπτική και ικανοποιεί

$$(\forall x,y \in P)\,[x < y \Leftrightarrow h\,(x) < h\,(y)]\,.$$

Έτσι, αφού το P είναι καλώς διατεταγμένο, συμπεραίνουμε ότι και το D^+ είναι καλώς διατεταγμένο. ■

Θεώρημα 3.25 *Έστω D μια καλώς διατεταγμένη ακέραια περιοχή, και έστω R ένας τυχαίος δακτύλιος. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : D \longrightarrow R$. Επιπλέον, ισχύουν τα εξής:*

(i) Αν ο R είναι διατεταγμένη ακέραια περιοχή, τότε ο f είναι διαταξιακή εμφύτευση.

(ii) Αν ο R είναι καλώς διατεταγμένη ακέραια περιοχή, τότε ο f είναι διαταξιακός ισομορφισμός.

Απόδειξη Σύμφωνα με το θεώρημα αναδρομής, υπάρχει (μοναδική) συνάρτηση $f_0 : \mathbb{P}_D \longrightarrow R$ τέτοια ώστε

$$f_0\left(1_D\right) = 1_R$$

και

$$\left(\forall x \in \mathbb{P}_D\right)\left[f_0\left(x + 1_D\right) = f_0\left(x\right) + 1_R\right].$$

Στη συνέχεια επεκτείνουμε την f_0 σε μία συνάρτηση $f : D \longrightarrow R$ θέτοντας

$$f\left(0_D\right) := 0_R$$

και

$$f\left(-x\right) := -f_0\left(x\right), \quad x \in \mathbb{P}_D.$$

Με άλλα λόγια, η f ικανοποιεί

$$f\left(0_D\right) = 0_R, \quad f\left(1_D\right) = 1_R,$$

$$\left(\forall x \in \mathbb{P}_D\right)\left[f\left(x + 1_D\right) = f\left(x\right) + 1_R\right],$$

$$\left(\forall x \in \mathbb{P}_D\right)\left[f\left(-x\right) = -f\left(x\right)\right].$$

Ισχυριζόμαστε ότι η f έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες. Η επαλήθευση του ισχυρισμού αυτού αφήνεται ως άσκηση. [Για να δείξουμε ότι η f είναι ο μοναδικός ομομορφισμός από την D στον R, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν $g : R_1 \longrightarrow R_2$ και $h : R_1 \longrightarrow R_2$ είναι δύο ομομορφισμοί δακτυλίων, τότε το σύνολο $\{x \in R_1 : g\left(x\right) = h\left(x\right)\}$ είναι υποδακτύλιος του R_1.] ■

Τα δύο τελευταία θεωρήματα εγγυώνται την ύπαρξη και μοναδικότητα μιας καλώς διατεταγμένης ακέραιας περιοχής. Η ακέραια αυτή περιοχή είναι φυσικά ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$.

3.3 Ρητοί αριθμοί

Έστω D μια ακέραια περιοχή. Αν F είναι ένα σώμα τέτοιο ώστε η D είναι υποδακτύλιος του F και το F παράγεται από την D, δηλαδή

$$F = \{x/y : x, y \in D \wedge y \neq 0\},$$

τότε το F λέγεται **σώμα πηλίκων** (ή **σώμα κλασμάτων**) της D. Αν η D είναι υποδακτύλιος ενός σώματος K, τότε το υπόσωμα K_0 του K που παράγεται από την D είναι προφανώς ένα σώμα πηλίκων της D. Το K_0 λέγεται **σώμα πηλίκων** της D **μέσα στο** K.

Θεώρημα 3.26 *Έστω D μια ακέραια περιοχή. Πάνω στο $D \times (D - \{0\})$ ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ θέτοντας*

$$\langle x, y\rangle \sim \langle z, w\rangle :\Leftrightarrow xw = yz.$$

(Διαισθητικά και ανεπίσημα, $\langle x, y\rangle \sim \langle z, w\rangle \Leftrightarrow x/y = z/w$.) Έστω

$$K := \{[x, y] : \langle x, y\rangle \in D \times (D - \{0\})\}$$

το σύνολο πηλίκο του $D \times (D - \{0\})$ διά της $\sim$, όπου $[x, y]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $\langle x, y\rangle$. Τότε το K εφοδιασμένο με την παρακάτω δομή αποτελεί σώμα:

(i) $[x, y] + [z, w] := [xw + yz,\ yw]$.

(ii) $0_K := [0, 1]$.

(iii) $-[x, y] := [-x, y]$.

(iv) $[x, y]\,[z, w] := [xz,\ yw]$.

(v) $1_K := [1, 1]$.

(vi) $[x, y]^{-1} := [y, x] \quad$ *(εφόσον $[x, y] \neq 0_K$).*

Επιπλέον, η συνάρτηση $f : D \longrightarrow K$ με τύπο

$$f(x) := [x, 1]$$

είναι μια εμφύτευση της D στο K (άρα $D \cong f[D]$) και το K είναι ένα σώμα πηλίκων της $f[D]$.

Πόρισμα 3.27 *Κάθε ακέραια περιοχή έχει ένα σώμα πηλίκων.*

Απόδειξη Έστω D μια ακέραια περιοχή. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει μια εμφύτευση $f : D \longrightarrow K$ της D σε ένα σώμα K το οποίο είναι σώμα πηλίκων της $f[D]$. Διαλέγουμε ένα σύνολο A τέτοιο ώστε $A \approx K - f[D]$ και $A \cap D = \varnothing$.[2] Θέτοντας $F := A \cup D$, είναι προφανές ότι υπάρχει μια αμφίρριψη $g : F \longrightarrow K$ τέτοια ώστε $g \restriction D = f$. Αν τώρα μεταφέρουμε στο F τη δομή του K χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις g και g^{-1}, δηλαδή αν για κάθε $x, y \in F$ θέσουμε

$$x + y := g^{-1}(g(x) + g(y)), \qquad xy := g^{-1}(g(x)\, g(y)),$$

τότε το F γίνεται σώμα πηλίκων της D. ■

Θεώρημα 3.28 *Έστω D μια ακέραια περιοχή, F ένα σώμα πηλίκων της D, και $f : D \longrightarrow K$ μια εμφύτευση της D σε ένα σώμα K. Τότε υπάρχει μοναδική εμφύτευση $g : F \longrightarrow K$ η οποία επεκτείνει την f. Επιπλέον, το $g[F]$ είναι το σώμα πηλίκων της $f[D]$ μέσα στο K.*

Απόδειξη Για κάθε $x, y \in D$ με $y \neq 0$, θέτουμε

$$g\left(\frac{x}{y}\right) := \frac{f(x)}{f(y)}.$$

Τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. ■

Πόρισμα 3.29 *Αν F και F' είναι σώματα πηλίκων μιας ακέραιας περιοχής D, τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $g : F \longrightarrow F'$ τέτοιος ώστε $g(x) = x$ για κάθε $x \in D$.*

Χάρη στο προηγούμενο πόρισμα, μπορούμε (αν θέλουμε) να μιλάμε για "το" σώμα πηλίκων μιας ακέραιας περιοχής. Π.χ. το $\mathbb{Q}$ είναι "το" σώμα πηλίκων της ακέραιας περιοχής $\mathbb{Z}$.

Θεώρημα 3.30 *Έστω D μια διατεταγμένη ακέραια περιοχή, και έστω F ένα σώμα πηλίκων της D. Τότε η διάταξη της D επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο σε μια διάταξη του F έτσι ώστε το F να αποτελεί διατεταγμένο σώμα.*

[2] Θα δούμε αργότερα (Άσκηση 4.82) ότι για οποιαδήποτε δύο σύνολα X και Y, είναι δυνατό να βρεθεί ένα σύνολο Z τέτοιο ώστε $Z \approx Y$ και $Z \cap X = \varnothing$.

Απόδειξη Το
$$P := \{x/y : x, y \in D^+\}$$
είναι ένα υποσύνολο του F το οποίο ικανοποιεί
$$0 \notin P,$$
$$(\forall a \in F)\,(a = 0 \vee a \in P \vee -a \in P)\,,$$
$$(\forall a, b \in P)\,(a + b \in P \wedge ab \in P)\,.$$
Έτσι, με τη σχέση
$$a \lhd b \;:\Leftrightarrow\; b - a \in P$$
(όπου $a, b \in F$) το F αποτελεί διατεταγμένο σώμα και $F^+ = P$ (δείτε Άσκηση 2.50). Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\lhd$ επεκτείνει τη διάταξη $<$ της D. Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι αν το F αποτελεί διατεταγμένο σώμα και με μιαν άλλη διάταξη $\lhd'$ η οποία επεκτείνει την $<$, τότε $\lhd' = \lhd$. ■

Έστω F ένα σώμα. Αν το F δεν έχει γνήσια υποσώματα, τότε λέμε ότι το F είναι **πρώτο σώμα**. Με άλλα λόγια, το F είναι πρώτο σώμα αν και μόνον αν $\mathbb{Q}_F = F$. (Το $\mathbb{Q}_F$ είναι φυσικά πάντοτε πρώτο σώμα.)

Άσκηση 3.31 Δείξτε ότι ένα σώμα F είναι πρώτο αν και μόνον αν το F είναι σώμα πηλίκων της $\mathbb{Z}_F$.

Θεώρημα 3.32 *Έστω D μια καλώς διατεταγμένη ακέραια περιοχή, και έστω F ένα σώμα πηλίκων της D. Τότε το F είναι διατεταγμένο πρώτο σώμα.*

Θεώρημα 3.33 *Αν F, F' είναι δύο διατεταγμένα πρώτα σώματα, τότε υπάρχει μοναδική εμφύτευση $g : F \longrightarrow F'$, και μάλιστα η g είναι διαταξιακός ισομορφισμός μεταξύ των F και F'.*

Σύμφωνα με τα δύο τελευταία θεωρήματα, υπάρχει ένα και (κατ' ουσίαν) μοναδικό διατεταγμένο πρώτο σώμα. Το σώμα αυτό φυσικά είναι το $\mathbb{Q}$.

Άσκηση 3.34 Δείξτε ότι σε κάθε διατεταγμένο πρώτο σώμα η διάταξη είναι μοναδική.

3.4 Πυκνή διάταξη

Έστω $\langle A, < \rangle$ ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο. Αν

$$(\forall x, y \in A)\,[x < y \Rightarrow (\exists z \in A)\,(x < z < y)]\,,$$

τότε η $<$ λέγεται **πυκνή διάταξη** και το $\langle A, < \rangle$ (ή απλά το A) λέγεται **πυκνά διατεταγμένο σύνολο**. Αν ένα υποσύνολο B του A ικανοποιεί

$$(\forall x, y \in A)\,[x < y \Rightarrow (\exists z \in B)\,(x < z < y)]\,,$$

τότε λέμε ότι το B είναι **πυκνό υποσύνολο** του A ή ότι το B είναι **πυκνό μέσα στο** A.

Παράδειγμα 3.35 Η συνήθης διάταξη $<$ του $\mathbb{R}$ είναι μια πυκνή διάταξη. Το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό μέσα στο $\mathbb{R}$, ενώ αντίθετα το $\mathbb{Z}$ δεν είναι.

Με τον όρο **πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα** εννοούμε ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο $A \neq \varnothing$ το οποίο δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο. Προφανώς ένα τέτοιο A είναι άπειρο σύνολο.

Παράδειγμα 3.36 Κάθε διατεταγμένο σώμα είναι ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα.

Θεώρημα 3.37 *Κάθε αριθμήσιμο πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα είναι ισόμορφο*[3] *με το* $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.

Απόδειξη Υποθέτοντας ότι το A είναι ένα αριθμήσιμο πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα, έστω $\mathcal{I}$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων f όπου f είναι ισομορφισμός από κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του A σε κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$. Για παράδειγμα, αν

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

είναι στοιχεία του A και

$$y_1 < y_2 < \cdots < y_n$$

είναι στοιχεία του $\mathbb{Q}$, τότε η συνάρτηση

$$\{\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \ldots, \langle x_n, y_n \rangle\}$$

[3] Υπενθυμίζουμε ότι δύο ολικώς διατεταγμένα σύνολα $\langle A, < \rangle$ και $\langle B, < \rangle$ λέγονται ισόμορφα αν υπάρχει ένας ισομορφισμός από το $\langle A, < \rangle$ στο $\langle B, < \rangle$, δηλαδή μια αμφίρριψη $f : A \longrightarrow B$ τέτοια ώστε $(\forall x, y \in A)\,[x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)]$.

είναι στοιχείο του $\mathcal{I}$. Το $\mathcal{I}$ έχει την ακόλουθη "παλινδρομική" ιδιότητα: για κάθε $f \in \mathcal{I}$ και κάθε $a \in A$ (αντ. $q \in \mathbb{Q}$), υπάρχει $g \in \mathcal{I}$ με $f \subseteq g$ και $a \in \operatorname{dom}(g)$ (αντ. $q \in \operatorname{ran}(g)$). Για παράδειγμα, έστω ότι

$$f = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\},$$

όπου τα $x_1 < x_2 < x_3$ είναι στοιχεία του A και τα $y_1 < y_2 < y_3$ είναι στοιχεία του $\mathbb{Q}$. Αν το a είναι ένα στοιχείο του A τέτοιο ώστε $x_2 < a < x_3$, τότε μπορούμε να πάρουμε

$$g = f \cup \{\langle a, q\rangle\},$$

όπου το q είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $y_2 < q < y_3$. Γράφοντας τώρα

$$A = \left\{a_n : n \in \mathbb{Z}^+\right\}, \quad \mathbb{Q} = \left\{q_n : n \in \mathbb{Z}^+\right\},$$

ορίζουμε μια ακολουθία

$$f_1 \subseteq f_2 \subseteq f_3 \subseteq \cdots$$

στοιχείων του $\mathcal{I}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} f_1 &:= \{\langle a_1, q_1\rangle\}, \\ f_{2n} &:= \text{κάποια } g \in \mathcal{I} \text{ με } f_{2n-1} \subseteq g \text{ και } a_n \in \operatorname{dom}(g), \\ f_{2n+1} &:= \text{κάποια } g \in \mathcal{I} \text{ με } f_{2n} \subseteq g \text{ και } q_n \in \operatorname{ran}(g). \end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι η συνάρτηση

$$h := \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$$

είναι ένας ισομορφισμός από το A στο $\mathbb{Q}$. ∎

Άσκηση 3.38 Δείξτε ότι κάθε αριθμήσιμο ολικώς διατεταγμένο σύνολο είναι ισόμορφο με κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.

Έστω A ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα, και έστω T ένα υποσύνολο του A με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\varnothing \neq T \neq A$.

(ii) Το T είναι "κλειστό προς τα αριστερά", δηλαδή

$$(\forall x, y \in A)\,(x < y \wedge y \in T \;\Rightarrow\; x \in T).$$

(iii) Το T δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Τότε το T λέγεται **τομή Dedekind** (στο A). Παρατηρούμε ότι το συμπλήρωμα $T' = A - T$ ικανοποιεί

$$T' \neq \varnothing,$$

$$(\forall x, y \in A)\left(x \in T \wedge y \in T' \;\Rightarrow\; x < y\right),$$

$$T' = \{y \in A : y \text{ είναι άνω φράγμα του } T\}.$$

Αν το T' έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε λέμε ότι το T είναι μια **στοιχειώδης**[4] **τομή Dedekind**. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι το T είναι **χάσμα**.

Παράδειγμα 3.39 Θεωρούμε τα παρακάτω δύο υποσύνολα του $\mathbb{Q}$:

$$T_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}, \quad T_2 = \left\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\right\}.$$

Το T_1 είναι μια στοιχειώδης τομή Dedekind, ενώ το T_2 είναι ένα χάσμα.

Θεώρημα 3.40 *Έστω A ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα. Έχουμε:*

(i) Για κάθε $a \in A$, το σύνολο

$$\widehat{a} := \{x \in A : x < a\}$$

είναι μια στοιχειώδης τομή Dedekind στο A.

(ii) Αν T είναι μια στοιχειώδης τομή Dedekind στο A και $a = \min T'$, τότε

$$T = \widehat{a} \quad \text{και} \quad a = \sup T.$$

(iii) Αν T είναι ένα χάσμα στο A, τότε το T είναι άνω φραγμένο αλλά δεν έχει $\sup$.

(iv) Αν X είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του A το οποίο δεν έχει $\sup$, και αν U είναι το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων του X, τότε $X \subseteq U'$ και το U' είναι ένα χάσμα στο A.

Θεώρημα 3.41 *Έστω A ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του A έχει $\sup$.

(ii) Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του A έχει $\inf$.

[4] Η ορολογία αυτή δεν είναι καθιερωμένη.

(iii) Το A δεν έχει χάσματα.

Ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα λέγεται **πλήρες** αν ικανοποιεί τις ισοδύναμες συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος.

Παράδειγμα 3.42 Το $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ είναι πλήρες, ενώ αντίθετα το $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ δεν είναι πλήρες.

Έστω A και B δύο πυκνά διατεταγμένα σύνολα χωρίς άκρα. Λέμε ότι το B είναι μια **πλήρωση** του A αν ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Το B είναι πλήρες.

(ii) $A \subseteq B$ και η διάταξη του B επεκτείνει τη διάταξη του A.

(iii) Το A είναι πυκνό μέσα στο B.

Παράδειγμα 3.43 Το $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ είναι μια πλήρωση του $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$.

Θεώρημα 3.44 *Έστω A ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα, και έστω $\mathcal{T}$ το σύνολο όλων των τομών Dedekind στο A. Τότε:*

(i) Το $\mathcal{T}$ εφοδιασμένο με τη σχέση $\subset_{\mathcal{T}}$ αποτελεί ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα.

(ii) Η συνάρτηση $a \mapsto \widehat{a}$ από το A στο $\mathcal{T}$ είναι γνησίως αύξουσα, και άρα το A είναι ισόμορφο με το υποσύνολο $\{\widehat{a} : a \in A\}$ του $\mathcal{T}$.

(iii) Το $\mathcal{T}$ είναι μια πλήρωση του $\{\widehat{a} : a \in A\}$.

Απόδειξη Αν $\mathcal{C}$ είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{T}$, τότε $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$ και $\bigcup \mathcal{C} = \sup \mathcal{C}$. Τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. ■

Πόρισμα 3.45 *Κάθε πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα έχει μια πλήρωση.*

Θεώρημα 3.46 *Έστω A ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα, και έστω B, C δύο πληρώσεις του A. Τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $f : B \longrightarrow C$ τέτοιος ώστε $f(a) = a$ για κάθε $a \in A$. (Έτσι, αν θέλουμε, μπορούμε να μιλάμε για "την" πλήρωση του A.)*

Απόδειξη Για κάθε $X \subseteq A$, το sup του X στο B (αν υπάρχει) θα συμβολίζεται με $\sup_B X$, ενώ το sup του X στο C (αν υπάρχει) θα συμβολίζεται με $\sup_C X$. Έστω τώρα ότι $b \in B$. Επειδή

$$b = \sup_B \{x \in A : x < b\},$$

είναι λογικό να θέσουμε

$$f(b) := \sup_C \{x \in A : x < b\}.$$

Τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. ■

3.5 Πραγματικοί αριθμοί

Έστω F ένα διατεταγμένο σώμα. Έτσι, ως προς τη διάταξη, το F αποτελεί ένα πυκνά διατεταγμένο σύνολο χωρίς άκρα. Αν το σύνολο αυτό είναι πλήρες, τότε λέμε ότι το F είναι ένα **πλήρες διατεταγμένο σώμα**.

Παράδειγμα 3.47 Το $\mathbb{R}$ είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα. (Παρακάτω θα αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα ενός πλήρους διατεταγμένου σώματος, οπότε το $\mathbb{R}$ μπορεί να ταυτιστεί με το εν λόγω σώμα.)

Θεώρημα 3.48 *Αν το F είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, τότε κάθε $a \in F^+$ είναι τετράγωνο, δηλαδή $a = b^2$ για κάποιο $b \in F$.*

Απόδειξη Ακριβώς όπως για την ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας ενός οποιουδήποτε θετικού πραγματικού αριθμού. ■

Παρατήρηση 3.49 Επειδή ο ρητός αριθμός 2 δεν είναι τετράγωνο ρητού αριθμού, το Θεώρημα 3.48 συνεπάγεται ότι το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρες σώμα.

Θεώρημα 3.50 *Έστω F ένα διατεταγμένο σώμα. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Για κάθε $a, b \in F$ με $a > 0$, υπάρχει ένα $n \in \mathbb{P}_F$ $(= \mathbb{Z}_F^+)$ τέτοιο ώστε $na > b$.*

(ii) *Το $\mathbb{P}_F$ δεν είναι άνω φραγμένο (μέσα στο F).*

(iii) $(\forall a \in F^+)\,(\exists n \in \mathbb{P}_F)\,\left(\frac{1}{n} < a\right)$.

(iv) $(\forall a \in F)\,(\exists n \in \mathbb{Z}_F)\,(n \leq a < n+1)$.

(v) *Το* $\mathbb{Q}_F$ *είναι πυκνό μέσα στο* F*.*

(vi) $(\forall a \in F)\,(a = \sup\{x \in \mathbb{Q}_F : x < a\})$.

(vii) $(\forall a \in F)\,(a = \inf\{x \in \mathbb{Q}_F : a < x\})$.

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω ότι ισχύει η (i). Αν το $\mathbb{P}_F$ έχει ένα άνω φράγμα $b \in F$, τότε διαλέγοντας ένα $n \in \mathbb{P}_F$ τέτοιο ώστε $n1 > b$, έχουμε άτοπο.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Έστω ότι ισχύει η (ii). Αν $a \in F^+$, τότε το $\frac{1}{a}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{P}_F$ και άρα υπάρχει ένα $n \in \mathbb{P}_F$ τέτοιο ώστε $n > \frac{1}{a}$ ή ισοδύναμα $\frac{1}{n} < a$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Υποθέτοντας ότι ισχύει η (iii), έστω $a \in F$. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε ένα $n \in \mathbb{Z}_F$ τέτοιο ώστε $n \leq a < n+1$. Αν $a = 0$, τότε μπορούμε να πάρουμε $n = 0$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $a > 0$. Επειδή υπάρχει ένα $k \in \mathbb{P}_F$ με $\frac{1}{k} < \frac{1}{a}$ ή ισοδύναμα $k > a$, μπορούμε να διαλέξουμε το k_0 να είναι το ελάχιστο τέτοιο k. Θέτοντας $n = k_0 - 1$, είναι προφανές ότι $n \leq a < n+1$. Τέλος, η περίπτωση $a < 0$ ανάγεται εύκολα στην περίπτωση $a > 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Υποθέτοντας ότι ισχύει η (iv), έστω $a, b \in F$ με $a < b$. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε ένα $r \in \mathbb{Q}_F$ τέτοιο ώστε $a < r < b$. Διαλέγουμε ένα $n \in \mathbb{Z}_F$ τέτοιο ώστε $n > \frac{1}{b-a}$, και κατόπιν ένα $m \in \mathbb{Z}_F$ τέτοιο ώστε $m \leq na < m+1$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το $r = \frac{m+1}{n}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

(v) $\Rightarrow$ (vi): Άσκηση.

(vi) $\Rightarrow$ (vii): Υποθέτοντας ότι ισχύει η (vi), έστω $a \in F$. Χρησιμοποιώντας την ισότητα $-a = \sup\{y \in \mathbb{Q}_F : y < -a\}$, είναι εύκολο να δούμε ότι $a = \inf\{x \in \mathbb{Q}_F : a < x\}$.

(vii) $\Rightarrow$ (i): Υποθέτοντας ότι ισχύει η (vii), έστω $a, b \in F$ με $a > 0$. Επειδή το $\frac{b}{a}$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του συνόλου $\left\{x \in \mathbb{Q}_F : \frac{b}{a} < x\right\}$, το σύνολο αυτό είναι μη κενό και άρα υπάρχει ένα $r \in \mathbb{Q}_F$ τέτοιο ώστε $\frac{b}{a} < r$. Αν διαλέξουμε τα $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_F$ έτσι ώστε $k_2 \neq 0$ και $r = \frac{k_1}{k_2}$, τότε

$$\frac{b}{a} < \frac{k_1}{k_2} \leq \left|\frac{k_1}{k_2}\right| = \frac{|k_1|}{|k_2|} < \frac{|k_1|+1}{|k_2|} \leq |k_1| + 1.$$

Έτσι, θέτοντας $n = |k_1| + 1$, έχουμε $n \in \mathbb{P}_F$ και $na > b$. ∎

Ένα διατεταγμένο σώμα το οποίο ικανοποιεί τις ισοδύναμες συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος λέγεται **αρχιμήδειο σώμα**.

Παράδειγμα 3.51 Το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}$ είναι αρχιμήδεια σώματα.

Θεώρημα 3.52 *Κάθε υπόσωμα ενός αρχιμήδειου σώματος είναι αρχιμήδειο σώμα.*

Θεώρημα 3.53 *Κάθε πλήρες διατεταγμένο σώμα είναι αρχιμήδειο σώμα.*

Απόδειξη Αν το F είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, τότε το $\mathbb{P}_F$ δεν είναι άνω φραγμένο. ∎

Θεώρημα 3.54 *Έστω $\mathcal{R}$ μια πλήρωση του $\mathbb{Q}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{R}$ μπορεί να εφοδιαστεί με τη δομή ενός διατεταγμένου σώματος (με την ήδη υπάρχουσα διάταξη) έτσι ώστε το $\mathbb{Q}$ να είναι υπόσωμα του $\mathcal{R}$. Κατά συνέπεια, υπάρχει ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα.*

Για ευκολία θα διασπάσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.54 σε μια σειρά από λήμματα.

Λήμμα 3.55 *Έστω $a \in \mathcal{R}$ και $p \in \mathbb{Q}^+$. Τότε υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $q < a < r$ και $r - q < p$.*

Απόδειξη Διαλέγουμε ένα $s \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $s < a$ και ένα $n \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \frac{p}{2}$. Θέτοντας

$$m = \max\left\{k \in \mathbb{N} : s + \frac{k}{n} < a\right\},$$

έχουμε

$$s + \frac{m}{n} < a \leq s + \frac{m+1}{n} < s + \frac{m+2}{n}$$

και

$$s + \frac{m+2}{n} - \left(s + \frac{m}{n}\right) = \frac{2}{n} < p,$$

οπότε μπορούμε να πάρουμε $q = s + \frac{m}{n}$ και $r = s + \frac{m+2}{n}$. ∎

Λήμμα 3.56 *Έστω $a \in \mathcal{R}$ με $a > 0$, και έστω $p \in \mathbb{Q}^+$ με $p < 1$. Τότε υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Q}^+$ τέτοια ώστε $q < a < r$ και $\frac{q}{r} > p$.*

Απόδειξη Διαλέγουμε ένα $s \in \mathbb{Q}^+$ τέτοιο ώστε $s < a$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.55, διαλέγουμε τα $q, r \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $q < a < r$ και $r - q < s\,(1-p)$. Έχουμε $s < r$, οπότε

$$r - q < s\,(1-p) < r\,(1-p) = r - rp.$$

Επομένως $q > rp$ ή ισοδύναμα $\frac{q}{r} > p$ (αφού προφανώς $r > 0$). Τέλος, η ανισότητα $\frac{q}{r} > p$ συνεπάγεται ότι $q > 0$. ∎

Έστω $a, b \in \mathcal{R}$. Αν διαλέξουμε τα $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $p_1 < a < p_2$ και $q_1 < b < q_2$, τότε το σύνολο

$$\{x + y : x, y \in \mathbb{Q},\ x < a,\ y < b\}$$

περιέχει το $p_1 + q_1$ και είναι άνω φραγμένο από το $p_2 + q_2$. Συνεπώς μπορούμε να θέσουμε

$$a + b := \sup\{x + y : x, y \in \mathbb{Q},\ x < a,\ y < b\}.$$

Είναι προφανές ότι αν $x, y \in \mathbb{Q}$ με $x < a$ και $y < b$, τότε $x + y < a + b$ (όπου $x + y$ είναι το σύνηθες άθροισμα των ρητών x, y).

Λήμμα 3.57 *Για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$, η νέα σημασία του $p + q$ ταυτίζεται με τη συνήθη σημασία.*

Απόδειξη Έστω $r = p + q$, όπου το $p + q$ έχει τη συνήθη σημασία (δηλαδή είναι το σύνηθες άθροισμα των ρητών p, q), και έστω

$$A = \{x + y : x, y \in \mathbb{Q},\ x < p,\ y < q\}.$$

Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $r = \sup A$. Σίγουρα το r είναι άνω φράγμα του A. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το A έχει ένα άνω φράγμα $u \in \mathcal{R}$ τέτοιο ώστε $u < r$. Διαλέγουμε ένα $s \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$u < s < r,$$

και στη συνέχεια ένα $t \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$s - p < t < q.$$

Επειδή $s - t < p$ και $t < q$, έχουμε

$$s = (s - t) + t \in A.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο. ∎

Λήμμα 3.58 *Για κάθε $a, b \in \mathcal{R}$, έχουμε $a + b = b + a$.*

Απόδειξη Η αποδεικτέα ισότητα είναι προφανής. ∎

Λήμμα 3.59 *Για κάθε* $a, b, c \in \mathcal{R}$, *έχουμε* $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Απόδειξη Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι το $(a + b) + c$ είναι άνω φράγμα του συνόλου

$$S = \{x + w : x, w \in \mathbb{Q},\ x < a,\ w < b + c\}.$$

Έστω $x_1, w_1 \in \mathbb{Q}$ με $x_1 < a$ και $w_1 < b + c$. Επειδή

$$b + c = \sup\{y + z : y, z \in \mathbb{Q},\ y < b,\ z < c\},$$

είναι σαφές ότι υπάρχουν $y_1, z_1 \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$y_1 < b, \quad z_1 < c, \quad w_1 < y_1 + z_1.$$

Οι ανισότητες $x_1 < a$ και $y_1 < b$ συνεπάγονται ότι

$$x_1 + y_1 < a + b.$$

Η τελευταία και η $z_1 < c$ συνεπάγονται ότι

$$x_1 + y_1 + z_1 < (a + b) + c.$$

Έτσι, αφού $x_1 + w_1 < x_1 + y_1 + z_1$, έχουμε

$$x_1 + w_1 < (a + b) + c.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι το $(a + b) + c$ είναι άνω φράγμα του S. Επομένως

$$a + (b + c) = \sup S \leq (a + b) + c.$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η ανισότητα $(a + b) + c \leq a + (b + c)$. ■

Λήμμα 3.60 *Για κάθε* $a \in \mathcal{R}$, *έχουμε* $a + 0 = a$.

Απόδειξη Αν $x, y \in \mathbb{Q}$ με $x < a$ και $y < 0$, τότε $x + y < x < a$. Έτσι, το a είναι άνω φράγμα του συνόλου

$$S = \{x + y : x, y \in \mathbb{Q},\ x < a,\ y < 0\},$$

και άρα

$$a + 0 = \sup S \leq a.$$

Έστω ότι $a + 0 < a$. Διαλέγουμε $p, q \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$a + 0 < p < q < a.$$

Επειδή $q < a$ και $p - q < 0$, έχουμε

$$p = q + (p - q) < a + 0.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο. Συνεπώς $a + 0 = a$. ■

Έστω $a \in \mathcal{R}$. Αν διαλέξουμε τα $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $p_1 < a < p_2$, τότε το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{Q} : -x > a\}$$

περιέχει το $-p_2$ και είναι άνω φραγμένο από το $-p_1$. Συνεπώς μπορούμε να θέσουμε

$$-a := \sup \{x \in \mathbb{Q} : -x > a\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $y \in \mathbb{Q}$ και $y > a$, τότε $-y < -a$ (όπου το $-y$ έχει τη συνήθη σημασία, δηλαδή είναι ο αντίθετος του ρητού y).

Λήμμα 3.61 *Για κάθε $p \in \mathbb{Q}$, η νέα σημασία του $-p$ ταυτίζεται με τη συνήθη σημασία.*

Απόδειξη Έστω $q = -p$, όπου το $-p$ έχει τη συνήθη σημασία, και έστω

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : -x > p\}.$$

Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $q = \sup A$. Το q προφανώς είναι άνω φράγμα του A. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το A έχει ένα άνω φράγμα $u < q$ ($u \in \mathcal{R}$). Διαλέγοντας ένα $r \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $u < r < q$, οδηγούμαστε γρήγορα σε άτοπο. ■

Λήμμα 3.62 *Για κάθε $a \in \mathcal{R}$, έχουμε $a + (-a) = 0$.*

Απόδειξη Αν $x, y \in \mathbb{Q}$ με $x < a$ και $y < -a$, τότε προφανώς υπάρχει ένα $z \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $-z > a$ και $y < z$, οπότε

$$x + y < x + z < 0.$$

Επομένως $a + (-a) \leq 0$. Έστω τώρα ότι $a + (-a) < 0$. Διαλέγουμε ένα $p \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$a + (-a) < p < 0.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.55, διαλέγουμε $q, r \in \mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$q < a < r, \quad r - q < -p.$$

Οι ανισότητες $q < a$ και $-r < -a$ συνεπάγονται ότι

$$q - r < a + (-a).$$

Έτσι, $q - r < p$ το οποίο είναι άτοπο. ■

Κάνοντας μια σύντομη ανακεφαλαίωση, μέχρι στιγμής έχουμε δείξει ότι το $\mathcal{R}$ είναι μια προσθετική αβελιανή ομάδα. Επιπλέον, η ομάδα αυτή περιέχει το $\mathbb{Q}$ ως υποομάδα.

Λήμμα 3.63 *Έστω $a, b, c \in \mathcal{R}$ με $a < b$. Τότε $a + c < b + c$.*

Απόδειξη Είναι εύκολο να δούμε ότι $a + c \leq b + c$. Αν $a + c = b + c$, τότε $a = b$ το οποίο είναι άτοπο. ■

Για κάθε $a, b \in \mathcal{R}$, θέτουμε

$$ab := \begin{cases} 0 & \text{αν } a = 0 \text{ ή } b = 0, \\ \sup\{xy : x, y \in \mathbb{Q}^+,\ x < a,\ y < b\} & \text{αν } a > 0 \text{ και } b > 0, \\ -(a(-b)) & \text{αν } a > 0 \text{ και } b < 0, \\ -((-a)\,b) & \text{αν } a < 0 \text{ και } b > 0, \\ (-a)(-b) & \text{αν } a < 0 \text{ και } b < 0. \end{cases}$$

Οι τρεις τελευταίες περιπτώσεις αυτού του ορισμού ανάγονται στη δεύτερη περίπτωση, π.χ. αν $a > 0$ και $b < 0$, τότε το $a(-b)$ έχει νόημα διότι $-b > 0$. Επίσης, παρατηρούμε ότι αν $a, b > 0$ και $x, y \in \mathbb{Q}^+$ με $x < a$ και $y < b$, τότε $xy < ab$ (όπου xy είναι το σύνηθες γινόμενο των ρητών x, y).

Λήμμα 3.64 *Για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$, η νέα σημασία του pq ταυτίζεται με τη συνήθη σημασία.*

Απόδειξη Αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα για $p, q > 0$. Έστω $r = pq$, όπου το pq έχει τη συνήθη σημασία, και έστω

$$A = \left\{xy : x, y \in \mathbb{Q}^+,\ x < p,\ y < q\right\}.$$

Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $r = \sup A$. Το r προφανώς είναι άνω φράγμα του A. Έστω $s \in \mathbb{Q}$ με $s < r$. Θα δείξουμε ότι το s δεν είναι άνω φράγμα του A. Διαλέγοντας ένα $n \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$n > \frac{1}{p}, \quad n > \frac{1}{q}, \quad n > \frac{p+q}{r-s},$$

έχουμε
$$\left(p-\frac{1}{n}\right)\left(q-\frac{1}{n}\right)\in A$$
αλλά
$$\left(p-\frac{1}{n}\right)\left(q-\frac{1}{n}\right)=r-\frac{p+q}{n}+\frac{1}{n^2}>r-\frac{p+q}{n}>s.$$

■

Λήμμα 3.65 *Για κάθε $a,b\in\mathcal{R}$, έχουμε $ab=ba$.*

Απόδειξη Άσκηση. ■

Λήμμα 3.66 *Για κάθε $a,b,c\in\mathcal{R}$, έχουμε $a\,(bc)=(ab)\,c$.*

Απόδειξη Άσκηση. ■

Λήμμα 3.67 *Για κάθε $a\in\mathcal{R}$, έχουμε $a1=a$.*

Απόδειξη Θα υποθέσουμε ότι $a>0$ (η περίπτωση $a<0$ ανάγεται στην $a>0$, ενώ η περίπτωση $a=0$ είναι προφανής). Θεωρούμε το σύνολο
$$S=\left\{xy: x,y\in\mathbb{Q}^{+},\ x<a,\ y<1\right\}.$$
Το a είναι άνω φράγμα του S, άρα
$$a1=\sup S\leq a.$$
Έστω τώρα ότι $a1<a$. Διαλέγουμε $p,q\in\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε
$$a1<p<q<a.$$
Επειδή $0<q<a$ και $0<\frac{p}{q}<1$, έχουμε
$$p=q\cdot\frac{p}{q}<a1$$
το οποίο είναι άτοπο. ■

Λήμμα 3.68 *Για κάθε $a,b,c\in\mathcal{R}$, έχουμε $a\,(b+c)=ab+ac$.*

Απόδειξη Θα εξετάσουμε τρεις μόνο περιπτώσεις, αφήνοντας όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις ως άσκηση.

Περίπτωση 1η: κάποιο από τα a, b, c είναι 0. Τότε η αποδεικτέα ισότητα είναι προφανής.

Περίπτωση 2η: $a, b, c > 0$. Έστω ότι $x, w \in \mathbb{Q}^+$ με $x < a$ και $w < b + c$. Τότε $w < y + z$ για κάποια $y, z \in \mathbb{Q}^+$ με $y < b$ και $z < c$. Έχουμε $xy < ab$ και $xz < ac$, οπότε

$$xw < x(y+z) = xy + xz < ab + ac.$$

Αυτό δείχνει ότι

$$a(b+c) \leq ab + ac.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, ας υποθέσουμε ότι $u, v \in \mathbb{Q}$ με $u < ab$ και $v < ac$. Τότε υπάρχουν $x, y, z \in \mathbb{Q}^+$ τέτοια ώστε

$$x < a, \quad y < b, \quad z < c, \quad u < xy, \quad v < xz.$$

Έχουμε $y + z < b + c$, οπότε

$$u + v < xy + xz = x(y+z) < a(b+c).$$

Αυτό δείχνει ότι

$$ab + ac \leq a(b+c).$$

Περίπτωση 3η: $a, b > 0$, $c < 0$. Αν $b + c > 0$, τότε (χρησιμοποιώντας τη 2η περίπτωση) έχουμε

$$a(b+c) + a(-c) = a[(b+c) + (-c)] = ab$$

και άρα

$$a(b+c) = ab + [-(a(-c))] = ab + ac.$$

Αν $b + c = 0$, τότε

$$a(b+c) = 0 = a(-c) + [-(a(-c))] = ab + ac.$$

Αν $b + c < 0$, τότε (χρησιμοποιώντας ξανά τη 2η περίπτωση) έχουμε

$$a(-(b+c)) + ab = a(-(b+c) + b) = a(-c)$$

ή ισοδύναμα

$$a(-(b+c)) = -(ab) + a(-c),$$

και άρα

$$\begin{aligned} a\,(b+c) &= -\left[a\,(-\,(b+c))\right] = -\left[-\,(ab) + a\,(-c)\right] \\ &= ab + \left[-\,(a\,(-c))\right] = ab + ac. \end{aligned}$$

■

Για κάθε $a \in \mathcal{R} - \{0\}$, θέτουμε

$$a^{-1} := \begin{cases} \sup\left\{x \in \mathbb{Q}^+ : x^{-1} > a\right\} & \text{αν } a > 0, \\ -\left((-a)^{-1}\right) & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $a > 0$ και $y \in \mathbb{Q}$ με $y > a$, τότε $y^{-1} < a^{-1}$ (όπου το y^{-1} έχει τη συνήθη σημασία, δηλαδή είναι ο αντίστροφος του ρητού y).

Λήμμα 3.69 *Για κάθε $p \in \mathbb{Q}^*$, η νέα σημασία του p^{-1} ταυτίζεται με τη συνήθη σημασία.*

Απόδειξη Άσκηση. ■

Λήμμα 3.70 *Για κάθε $a \in \mathcal{R} - \{0\}$, έχουμε $aa^{-1} = 1$.*

Απόδειξη Αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα στην περίπτωση $a > 0$. Η ανισότητα αυτή προφανώς συνεπάγεται και την ανισότητα $a^{-1} > 0$. Έστω ότι $x, y \in \mathbb{Q}^+$ με $x < a$ και $y < a^{-1}$. Τότε $y < z$ για κάποιο $z \in \mathbb{Q}^+$ με $z^{-1} > a$, και άρα

$$xy < z^{-1}y < z^{-1}z = 1.$$

Έτσι, $aa^{-1} \leq 1$. Έστω τώρα ότι $aa^{-1} < 1$. Διαλέγουμε ένα $p \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $aa^{-1} < p < 1$. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.56, υπάρχουν $q, r \in \mathbb{Q}^+$ τέτοια ώστε $q < a < r$ και $\frac{q}{r} > p$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\frac{q}{r} < aa^{-1}$. ■

Λήμμα 3.71 *Για κάθε $a, b, c \in \mathcal{R}$ με $a < b$ και $c > 0$, έχουμε $ac < bc$.*

Απόδειξη Οι ανισότητες $b - a > 0$ και $c > 0$ συνεπάγονται ότι $(b-a)\,c > 0$ ή ισοδύναμα $ac < bc$. ■

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.54 είναι τώρα ολοκληρωμένη.

Άσκηση 3.72 Έστω $f : F \longrightarrow K$ μια εμφύτευση ενός πλήρους διατεταγμένου σώματος F μέσα σε ένα διατεταγμένο σώμα K. Δείξτε ότι:

(i) Η f είναι διαταξιακή εμφύτευση. (**Υπόδειξη**: Το Θεώρημα 3.48 συνεπάγεται ότι $f[F^+] \subseteq K^+$.)

(ii) Αν το K είναι αρχιμήδειο, τότε η f είναι διαταξιακός ισομορφισμός και το K είναι πλήρες. (**Υπόδειξη**: Αν το K είναι αρχιμήδειο και $c \in K$, τότε $c = f(a)$ όπου $a = \sup\{x \in F : f(x) < c\}$.)

Θεώρημα 3.73 *Έστω K ένα διατεταγμένο σώμα. Τότε το K είναι πλήρες αν και μόνον αν το K είναι αρχιμήδειο και κάθε αρχιμήδειο σώμα είναι διαταξιακά εμφυτεύσιμο μέσα στο K.*

Απόδειξη Έστω ότι το K είναι αρχιμήδειο και κάθε αρχιμήδειο σώμα είναι διαταξιακά εμφυτεύσιμο μέσα στο K. Διαλέγουμε ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα F (η ύπαρξη του οποίου είναι εγγυημένη από το Θεώρημα 3.54). Επειδή το F είναι αρχιμήδειο (Θεώρημα 3.53), υπάρχει μια διαταξιακή εμφύτευση $f : F \longrightarrow K$. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, η f είναι διαταξιακός ισομορφισμός και το K είναι πλήρες.

Αντίστροφα, έστω ότι το K είναι πλήρες (και άρα αρχιμήδειο). Θεωρούμε ένα τυχαίο αρχιμήδειο σώμα F, με σκοπό να δείξουμε ότι το F είναι διαταξιακά εμφυτεύσιμο μέσα στο K. Έστω $f : \mathbb{Q}_F \longrightarrow \mathbb{Q}_K$ ο μοναδικός διαταξιακός ισομορφισμός από το $\mathbb{Q}_F$ στο $\mathbb{Q}_K$. Ισχυριζόμαστε ότι η $g : F \longrightarrow K$ με

$$g(a) = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{Q}_F \wedge x < a\}$$

είναι μια διαταξιακή εμφύτευση του F μέσα στο K. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού θα γίνει σε βήματα.

Βήμα 1: Η g είναι επέκταση της f. [Επομένως $g(0) = f(0) = 0$ και $g(1) = f(1) = 1$.]

Έστω $p \in \mathbb{Q}_F$. Επειδή $f(x) < f(p)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}_F$ με $x < p$, έχουμε $g(p) \leq f(p)$. Αν $g(p) < f(p)$, τότε θα υπήρχε ένα $q \in \mathbb{Q}_F$ τέτοιο ώστε $g(p) < f(q) < f(p)$. Αυτό όμως είναι άτοπο [διότι $q < p$ και κατά συνέπεια $f(q) \leq g(p)$].

Βήμα 2: Η g είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $a, b \in F$ με $a < b$. Διαλέγουμε $p, q \in \mathbb{Q}_F$ τέτοια ώστε $a < p < q < b$. Επειδή $f(x) < f(p)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}_F$ με $x < a$, έχουμε $g(a) \leq f(p)$. Επίσης, είναι προφανές ότι $f(p) < f(q) \leq g(b)$. Συνεπώς $g(a) < g(b)$.

Βήμα 3: $g(a + b) = g(a) + g(b)$ για κάθε $a, b \in F$.

Έστω $z \in \mathbb{Q}_F$ με $z < a + b$. Διαλέγοντας ένα $p \in \mathbb{Q}_F$ τέτοιο ώστε $z - a < p < b$, έχουμε $f(z - p) \leq g(a)$ (αφού $z - p < a$) και $f(p) \leq g(b)$, οπότε

$$f(z) = f(z - p + p) = f(z - p) + f(p) \leq g(a) + g(b).$$

Αυτό δείχνει ότι $g(a + b) \leq g(a) + g(b)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $g(a + b) < g(a) + g(b)$. Διαλέγουμε ένα $q \in \mathbb{Q}_F$ τέτοιο ώστε

$$g(a + b) < f(q) < g(a) + g(b),$$

και στη συνέχεια ένα $r \in \mathbb{Q}_F$ τέτοιο ώστε

$$f(q) - g(a) < f(r) < g(b).$$

Επειδή

$$g(q - r) = f(q - r) = f(q) - f(r) < g(a),$$

έχουμε $q - r < a$. Επίσης, επειδή

$$g(r) = f(r) < g(b),$$

έχουμε $r < b$. Προσθέτοντας τις ανισότητες $q - r < a$ και $r < b$ κατά μέλη, παίρνουμε $q < a + b$. Συνεπώς $f(q) \leq g(a + b)$ το οποίο είναι άτοπο.

Βήμα 4: $g(ab) = g(a)\,g(b)$ για κάθε $a, b \in F^{+}$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του βήματος 3. Έστω $z \in \mathbb{Q}_F$ με $z < ab$. Διαλέγοντας ένα $p \in \mathbb{Q}_F^{+}$ τέτοιο ώστε $\frac{z}{a} < p < b$, έχουμε $f\left(\frac{z}{p}\right) \leq g(a)$ και $f(p) \leq g(b)$, οπότε

$$f(z) = f\left(\frac{z}{p} \cdot p\right) = f\left(\frac{z}{p}\right) f(p) \leq g(a)\,f(p) \leq g(a)\,g(b).$$

Αυτό δείχνει ότι $g(ab) \leq g(a)\,g(b)$. Ας υποθέσουμε ότι $g(ab) < g(a)\,g(b)$. Διαλέγουμε ένα $q \in \mathbb{Q}_F$ τέτοιο ώστε

$$g(ab) < f(q) < g(a)\,g(b),$$

και στη συνέχεια ένα $r \in \mathbb{Q}_F$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(q)}{g(a)} < f(r) < g(b).$$

Επειδή

$$g\left(\frac{q}{r}\right) = f\left(\frac{q}{r}\right) = \frac{f(q)}{f(r)} < g(a),$$

έχουμε $\frac{q}{r} < a$. Επίσης, επειδή

$$g(r) = f(r) < g(b),$$

έχουμε $r < b$. Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες $\frac{q}{r} < a$ και $r < b$ κατά μέλη, παίρνουμε $q < ab$. Συνεπώς $f(q) \leq g(ab)$ το οποίο είναι άτοπο.

Βήμα 5: $g(ab) = g(a)\, g(b)$ για κάθε $a, b \in F$.

Η ισότητα είναι προφανής αν $a = 0$ ή $b = 0$. Επίσης, η περίπτωση $a, b > 0$ είναι το βήμα 4. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις ανάγονται εύκολα στην προηγούμενη περίπτωση, αφού (χάρη στο βήμα 3) έχουμε $g(-c) = -g(c)$ για κάθε $c \in F$. Π.χ. αν $a > 0$ και $b < 0$, τότε

$$\begin{aligned} g(ab) &= g(-(a(-b))) = -g(a(-b)) = -[g(a)\, g(-b)] \\ &= -[g(a)(-g(b))] = g(a)\, g(b). \end{aligned}$$

■

Άσκηση 3.74 Έστω F, K δύο αρχιμήδεια σώματα. Δείξτε ότι υπάρχει το πολύ μία διαταξιακή εμφύτευση του F μέσα στο K. (**Υπόδειξη**: Αν f, g είναι δύο διαταξιακές εμφυτεύσεις του F μέσα στο K, τότε $f \restriction \mathbb{Q}_F = g \restriction \mathbb{Q}_F$.)

Θεώρημα 3.75 *Έστω F, K δύο πλήρη διατεταγμένα σώματα. Τότε υπάρχει μοναδική εμφύτευση $f : F \longrightarrow K$. Επιπλέον, η f είναι διαταξιακός ισομορφισμός από το F στο K.*

Τα Θεωρήματα 3.54 και 3.75 εξασφαλίζουν την ύπαρξη και μοναδικότητα ενός πλήρους διατεταγμένου σώματος. Το σώμα αυτό είναι φυσικά το $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 3.76 *Η διάταξη του $\mathbb{R}$ είναι μοναδική.*

Θεώρημα 3.77 *Ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο A είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}$ αν και μόνον αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i) Το A είναι πυκνά διατεταγμένο χωρίς άκρα.

(ii) Το A είναι πλήρες.

(iii) Το A έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Απόδειξη Υποθέτοντας ότι το A ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες, έστω B ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του A. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.37, υπάρχει ένας ισομορφισμός $f : B \longrightarrow \mathbb{Q}$. Η συνάρτηση $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$g\left(a\right) = \sup\left\{f\left(x\right) : x \in B \wedge x < a\right\}$$

επεκτείνει την f και είναι ισομορφισμός μεταξύ των A και $\mathbb{R}$. ■

3.6 Ακολουθιακή πλήρωση

Μια συνάρτηση f πάνω στο $\mathbb{Z}^+$ θα λέγεται **ακολουθία**. Θέτοντας

$$x_n := f\left(n\right),$$

το x_n ονομάζεται **n-οστός όρος** της ακολουθίας και η ακολουθία γράφεται

$$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots\rangle \quad \text{ή} \quad \langle x_n\rangle_{n=1}^{\infty} \quad \text{ή απλά} \quad \langle x_n\rangle.$$

Αν όλοι οι όροι της $\langle x_n\rangle$ είναι στοιχεία ενός συνόλου X, τότε (κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού) γράφουμε

$$\langle x_n\rangle \subseteq X$$

και λέμε ότι η $\langle x_n\rangle$ είναι μια **ακολουθία μέσα στο** X ή μια **ακολουθία στοιχείων του** X.

Έστω F ένα διατεταγμένο σώμα το οποίο σε όλη την παρούσα ενότητα θα παραμείνει σταθερό. Τα στοιχεία

$$0_F,\ 1_F,\ 1_F + 1_F,\ 1_F + 1_F + 1_F,\ \ldots$$

του F θα γράφονται

$$\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \ldots$$

αντιστοίχως. Αν $\langle x_n\rangle \subseteq F$ και $x \in F$, τότε το x λέγεται **όριο** της $\langle x_n\rangle$ αν για κάθε $\varepsilon \in F^+$ υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Παράδειγμα 3.78 Για κάθε $c \in F$, το c είναι όριο της σταθερής ακολουθίας $\langle c\rangle = \langle c, c, c, \ldots\rangle$ (κάθε όρος της οποίας ισούται με c).

Θεώρημα 3.79 *Έστω $\langle x_n \rangle \subseteq F$. Τότε η $\langle x_n \rangle$ έχει το πολύ ένα όριο.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι $x, y \in F$ είναι δύο διαφορετικά όρια της $\langle x_n \rangle$. Διαλέγουμε $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοια ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{|x-y|}{\mathbf{2}},$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow |x_n - y| < \frac{|x-y|}{\mathbf{2}}.$$

Θέτοντας $m = \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} |x-y| &= |x - x_m + x_m - y| \leq |x_m - x| + |x_m - y| \\ &< \frac{|x-y|}{\mathbf{2}} + \frac{|x-y|}{\mathbf{2}} = |x-y| \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. ■

Έστω $\langle x_n \rangle \subseteq F$. Αν η $\langle x_n \rangle$ έχει όριο, τότε λέμε ότι η $\langle x_n \rangle$ **συγκλίνει** ή ότι είναι **συγκλίνουσα**. Στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι η $\langle x_n \rangle$ **αποκλίνει** ή ότι είναι **αποκλίνουσα**. Αν η $\langle x_n \rangle$ συγκλίνει και $x \in F$ είναι το (μοναδικό) όριό της, τότε λέμε επίσης ότι η $\langle x_n \rangle$ **συγκλίνει στο** x και γράφουμε

$$x_n \to x \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty$$

ή

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Με άλλα λόγια, το σύμβολο $\lim_{n \to \infty} x_n$ (ή απλά $\lim x_n$) συμβολίζει το όριο της $\langle x_n \rangle$, εφόσον αυτό υπάρχει.

Έστω $\langle x_n \rangle \subseteq F$. Δίνουμε τους εξής ορισμούς:

- Η $\langle x_n \rangle$ είναι **άνω φραγμένη** αν το σύνολο των όρων της είναι άνω φραγμένο, δηλαδή υπάρχει ένα $c \in F$ τέτοιο ώστε

$$x_n \leq c$$

  για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

- Η $\langle x_n \rangle$ είναι **κάτω φραγμένη** αν το σύνολο των όρων της είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή υπάρχει ένα $c \in F$ τέτοιο ώστε

$$c \leq x_n$$

  για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

- Η $\langle x_n \rangle$ είναι **φραγμένη** αν το σύνολο των όρων της είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει ένα $c \in F$ τέτοιο ώστε
$$|x_n| \leq c$$
για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. (Ισοδύναμα, η $\langle x_n \rangle$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν η $\langle x_n \rangle$ είναι ταυτοχρόνως άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη.)

Θεώρημα 3.80 *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη Έστω $\langle x_n \rangle \subseteq F$ μια συγκλίνουσα ακολουθία και έστω $x = \lim x_n$. Διαλέγουμε ένα $k \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε
$$n > k \Rightarrow |x_n - x| < \mathbf{1}$$
και θέτουμε
$$c = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|, \mathbf{1} + |x|\right\}.$$
Αν $n > k$, τότε
$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < \mathbf{1} + |x| \leq c.$$
Επίσης,
$$|x_i| \leq c, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$
Συνεπώς $|x_n| \leq c$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. ■

Θεώρημα 3.81 *Έστω $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$ δύο συγκλίνουσες ακολουθίες μέσα στο F, και έστω*
$$x = \lim x_n, \quad y = \lim y_n.$$
Τότε:

(i) Η ακολουθία $\langle -x_n \rangle$ είναι συγκλίνουσα και
$$\lim(-x_n) = -x.$$

(ii) Η ακολουθία $\langle |x_n| \rangle$ είναι συγκλίνουσα και
$$\lim |x_n| = |x|.$$

(iii) Η ακολουθία $\langle x_n + y_n \rangle$ είναι συγκλίνουσα και
$$\lim(x_n + y_n) = x + y.$$

(iv) *Η ακολουθία* $\langle x_n - y_n \rangle$ *είναι συγκλίνουσα και*

$$\lim\,(x_n - y_n) = x - y.$$

(v) *Η ακολουθία* $\langle x_n y_n \rangle$ *είναι συγκλίνουσα και*

$$\lim\,(x_n y_n) = xy.$$

(vi) *Υποθέτοντας ότι* $y \neq \mathbf{0}$ *και* $y_n \neq \mathbf{0}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}^+$, *η ακολουθία* $\langle \mathbf{1}/y_n \rangle$ *είναι συγκλίνουσα και*

$$\lim \frac{\mathbf{1}}{y_n} = \frac{\mathbf{1}}{y}\,.$$

(vii) *Υποθέτοντας ότι* $y \neq \mathbf{0}$ *και* $y_n \neq \mathbf{0}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}^+$, *η ακολουθία* $\langle x_n/y_n \rangle$ *είναι συγκλίνουσα και*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}\,.$$

Απόδειξη (i), (ii): Άσκηση.

(iii): Έστω $\varepsilon \in F^+$. Διαλέγουμε $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοια ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}}\,,$$

$$n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}}\,.$$

Έτσι, για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}} + \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}} = \varepsilon.$$

Συνεπώς η ακολουθία $\langle x_n + y_n \rangle$ συγκλίνει στο $x + y$.

(iv): Προφανές (χάρη στα προηγούμενα).

(v): Επειδή η $\langle y_n \rangle$ είναι φραγμένη (ως συγκλίνουσα ακολουθία), υπάρχει ένα $c \in F^+$ τέτοιο ώστε $|y_n| \leq c$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Τώρα, δοθέντος ενός $\varepsilon \in F^+$, διαλέγουμε $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοια ώστε

$$n \geq n_1 \;\Rightarrow\; |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{c + |x|}\,,$$

$$n \geq n_2 \;\Rightarrow\; |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{c + |x|}\,.$$

Έτσι, για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)\, y_n + (y_n - y)\, x|$$
$$\leq |x_n - x|\, |y_n| + |y_n - y|\, |x| < \frac{\varepsilon c}{c + |x|} + \frac{\varepsilon\, |x|}{c + |x|} = \varepsilon.$$

Συνεπώς η ακολουθία $\langle x_n y_n \rangle$ συγκλίνει στο xy.

(vi): Ας υποθέσουμε ότι $y \neq \mathbf{0}$ και $y_n \neq \mathbf{0}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Κατ' αρχάς διαλέγουμε ένα $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{|y|}{\mathbf{2}}.$$

Για κάθε $n \geq n_1$ έχουμε

$$|y| = |y - y_n + y_n| \leq |y_n - y| + |y_n| < \frac{|y|}{\mathbf{2}} + |y_n|$$

και άρα

$$\frac{\mathbf{1}}{|y_n|} < \frac{\mathbf{2}}{|y|}.$$

Στη συνέχεια, δοθέντος ενός $\varepsilon \in F^+$, διαλέγουμε ένα $n_2 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon y^2}{\mathbf{2}}.$$

Έτσι, για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$\left|\frac{\mathbf{1}}{y_n} - \frac{\mathbf{1}}{y}\right| = |y_n - y| \cdot \frac{\mathbf{1}}{|y_n|} \cdot \frac{\mathbf{1}}{|y|} < \frac{\varepsilon y^2}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{2}}{|y|} \cdot \frac{\mathbf{1}}{|y|} = \varepsilon.$$

Συνεπώς η ακολουθία $\langle \mathbf{1}/y_n \rangle$ συγκλίνει στο $\mathbf{1}/y$.

(vii): Προφανές (χάρη στα προηγούμενα). ∎

Άσκηση 3.82 Έστω $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$ δύο συγκλίνουσες ακολουθίες μέσα στο F. Δείξτε ότι αν υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq y_n,$$

τότε $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Άσκηση 3.83 (κριτήριο παρεμβολής)
Έστω $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle, \langle z_n \rangle$ τρεις ακολουθίες μέσα στο F, και έστω ότι οι $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο w. Δείξτε ότι αν υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq z_n \leq y_n,$$

τότε η $\langle z_n \rangle$ είναι συγκλίνουσα και $\lim z_n = w$.

Έστω $\langle x_n \rangle \subseteq F$. Η $\langle x_n \rangle$ λέγεται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon \in F^+$ υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Θεώρημα 3.84 *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη Έστω $\langle x_n \rangle \subseteq F$ μια συγκλίνουσα ακολουθία και έστω $x = \lim x_n$. Δοθέντος ενός $\varepsilon \in F^+$, διαλέγουμε ένα $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}}.$$

Αν $m, n \geq n_0$, τότε

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x) + (x - x_n)| \leq |x_m - x| + |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}} + \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}} = \varepsilon.$$

Συνεπώς η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy. ■

Θεώρημα 3.85 *Κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.*

Απόδειξη Έστω $\langle x_n \rangle \subseteq F$ μια ακολουθία Cauchy. Διαλέγουμε ένα $k \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$m, n > k \Rightarrow |x_m - x_n| < \mathbf{1}$$

και θέτουμε

$$c = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|, \mathbf{1} + |x_{k+1}|\}.$$

Αν $n > k$, τότε

$$|x_n| = |x_n - x_{k+1} + x_{k+1}| \leq |x_n - x_{k+1}| + |x_{k+1}| < \mathbf{1} + |x_{k+1}| \leq c.$$

Επίσης,

$$|x_i| \leq c, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Συνεπώς $|x_n| \leq c$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. ■

Άσκηση 3.86 Δείξτε ότι αν $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$ είναι δύο ακολουθίες Cauchy μέσα στο F, τότε και οι ακολουθίες

$$\langle -x_n \rangle, \quad \langle |x_n| \rangle, \quad \langle x_n + y_n \rangle, \quad \langle x_n - y_n \rangle, \quad \langle x_n y_n \rangle$$

είναι Cauchy.

Έστω $\langle x_n \rangle$ μια ακολουθία μέσα σε ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο X. Επειδή η $\langle x_n \rangle$ ταυτίζεται με τη συνάρτηση $n \mapsto x_n$ (από το $\mathbb{Z}^+$ στο X), έχει νόημα να μιλάμε για μονοτονία της $\langle x_n \rangle$. Π.χ. η $\langle x_n \rangle$ είναι γνησίως αύξουσα αν και μόνον αν

$$x_n < x_{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

Έστω $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$ δύο ακολουθίες. Η $\langle y_n \rangle$ λέγεται **υπακολουθία** της $\langle x_n \rangle$ αν υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $\langle k_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^+$ τέτοια ώστε

$$y_n = x_{k_n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

Παρατήρηση 3.87 Αν η $\langle k_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^+$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε

$$k_n \geq n$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. (Η απόδειξη είναι με επαγωγή στο n.)

Θεώρημα 3.88 (θεώρημα μονότονης υπακολουθίας)
Έστω $\langle x_n \rangle$ μια ακολουθία μέσα σε ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο X. Τότε η $\langle x_n \rangle$ έχει μια μονότονη υπακολουθία.

Απόδειξη Θα λέμε ότι ένας θετικός ακέραιος k είναι **σημείο κορυφής** της $\langle x_n \rangle$ αν $x_k > x_n$ για κάθε $n > k$. Έστω K το σύνολο των σημείων κορυφής της $\langle x_n \rangle$. Αν το K είναι άπειρο, τότε διαλέγοντας μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $\langle k_n \rangle \subseteq K$, βλέπουμε αμέσως ότι η $\langle x_{k_n} \rangle$ είναι μια γνησίως φθίνουσα υπακολουθία της $\langle x_n \rangle$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το K είναι πεπερασμένο. Διαλέγουμε ένα $r_1 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε $r_1 > k$ για κάθε $k \in K$. Επειδή το r_1 δεν είναι σημείο κορυφής της $\langle x_n \rangle$, υπάρχει ένα $r_2 > r_1$ τέτοιο ώστε $x_{r_1} \leq x_{r_2}$. Επειδή το r_2 δεν είναι σημείο κορυφής της $\langle x_n \rangle$, υπάρχει ένα $r_3 > r_2$ τέτοιο ώστε $x_{r_2} \leq x_{r_3}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε την $\langle x_{r_n} \rangle$ η οποία είναι μια αύξουσα υπακολουθία της $\langle x_n \rangle$. ■

Θεώρημα 3.89 *Έστω $\langle x_n \rangle$ μια συγκλίνουσα ακολουθία μέσα στο F, και έστω $\langle y_n \rangle$ μια υπακολουθία της $\langle x_n \rangle$. Τότε η $\langle y_n \rangle$ είναι συγκλίνουσα και $\lim y_n = \lim x_n$.*

Απόδειξη Έστω $x = \lim x_n$. Επίσης, έστω $\langle k_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^+$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία τέτοια ώστε

$$y_n = x_{k_n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Δοθέντος ενός $\varepsilon \in F^+$, διαλέγουμε ένα $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Για κάθε $n \geq n_0$, έχουμε

$$|y_n - x| = |x_{k_n} - x| < \varepsilon$$

διότι $k_n \geq n \geq n_0$. Επομένως η $\langle y_n \rangle$ συγκλίνει στο x. ∎

Άσκηση 3.90 Δείξτε ότι κάθε υπακολουθία μιας ακολουθίας Cauchy είναι ακολουθία Cauchy.

Θεώρημα 3.91 *Έστω $\langle x_n \rangle$ μια ακολουθία Cauchy μέσα στο F, και έστω ότι η $\langle x_n \rangle$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\langle y_n \rangle$. Τότε η $\langle x_n \rangle$ είναι συγκλίνουσα και $\lim x_n = \lim y_n$.*

Απόδειξη Έστω $y = \lim y_n$. Επίσης, έστω $\langle k_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^+$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία τέτοια ώστε

$$y_n = x_{k_n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Δοθέντος ενός $\varepsilon \in F^+$, διαλέγουμε $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοια ώστε

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}},$$
$$n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}}.$$

Για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} |x_n - y| &= |(x_n - y_n) + (y_n - y)| = |(x_n - x_{k_n}) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x_{k_n}| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}} + \frac{\varepsilon}{\mathbf{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως η $\langle x_n \rangle$ συγκλίνει στο y. ∎

Αν κάθε ακολουθία Cauchy μέσα στο F συγκλίνει, τότε το F λέγεται **ακολουθιακά πλήρες σώμα**.

Θεώρημα 3.92 *Οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Το F είναι πλήρες.

(ii) Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία μέσα στο F συγκλίνει.

*(iii) Κάθε φραγμένη ακολουθία μέσα στο F έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία (**ιδιότητα Bolzano-Weierstrass**).*

(iv) Το F είναι αρχιμήδειο και ακολουθιακά πλήρες.

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω ότι ισχύει η συνθήκη (i). Αν η ακολουθία $\langle x_n \rangle \subseteq F$ είναι αύξουσα (αντ. φθίνουσα) και φραγμένη, τότε η $\langle x_n \rangle$ προφανώς συγκλίνει στο $\sup \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ (αντ. $\inf \{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Με το θεώρημα μονότονης υπακολουθίας.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Έστω ότι ισχύει η (iii). Ας υποθέσουμε ότι το $\mathbb{P}_F$ είναι άνω φραγμένο, δηλαδή η ακολουθία $\langle n\mathbf{1} \rangle$ είναι άνω φραγμένη. Τότε η εν λόγω ακολουθία θα έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\langle k_n \mathbf{1} \rangle$ ($k_1 < k_2 < \cdots$). Η $\langle k_n \mathbf{1} \rangle$ είναι Cauchy, άρα υπάρχει ένα $p \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$m, n \geq p \Rightarrow |k_m \mathbf{1} - k_n \mathbf{1}| < \mathbf{1}.$$

Αυτό όμως συνεπάγεται ότι

$$|k_{p+1} \mathbf{1} - k_p \mathbf{1}| < \mathbf{1}$$

ή ισοδύναμα

$$(k_{p+1} - k_p) \, \mathbf{1} < \mathbf{1},$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως το F είναι αρχιμήδειο. Για να δούμε ότι το F είναι ακολουθιακά πλήρες, έστω $\langle x_n \rangle \subseteq F$ μια ακολουθία Cauchy. Η $\langle x_n \rangle$ είναι φραγμένη και άρα έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Αυτό φυσικά συνεπάγεται ότι η $\langle x_n \rangle$ συγκλίνει.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Έστω ότι ισχύει η (iv). Θεωρούμε ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq F$, με σκοπό να δείξουμε ότι το A έχει sup. Το

$$B := \{x \in F : (\exists y \in A) \, (x \leq y)\}$$

είναι ένα υπερσύνολο του A με τα ίδια ακριβώς άνω φράγματα, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το B έχει sup. Παρατηρούμε ότι

$$(\forall z, x \in F) \, (z \leq x \wedge x \in B \ \Rightarrow \ z \in B) \, .$$

(Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο το B μας βολεύει περισσότερο από το A.) Έστω U το σύνολο των άνω φραγμάτων του B. Είναι προφανές ότι το $U' = F - U$ ικανοποιεί

$$U' \subseteq B.$$

Διαλέγουμε ένα $z \in B$ και ένα $u \in U$. Αν $n \in \mathbb{Z}^+$, τότε (επειδή το F είναι αρχιμήδειο) υπάρχει ένα $k \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$k\mathbf{1} > (n\mathbf{1})(u - z).$$

Από την ανισότητα αυτή παίρνουμε

$$z + \frac{k\mathbf{1}}{n\mathbf{1}} > u$$

και άρα

$$z + \frac{k\mathbf{1}}{n\mathbf{1}} \in U.$$

Έστω k_n ο ελάχιστος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε

$$z + \frac{k_n\mathbf{1}}{n\mathbf{1}} \in U.$$

Θέτοντας

$$u_n := z + \frac{k_n\mathbf{1}}{n\mathbf{1}}$$

και

$$x_n := u_n - \frac{\mathbf{1}}{n\mathbf{1}} = z + \frac{(k_n - 1)\,\mathbf{1}}{n\mathbf{1}},$$

παρατηρούμε ότι $x_n \in B$. (Αν $k_n = 1$, τότε $x_n = z \in B$. Αν $k_n > 1$, τότε $x_n \in U' \subseteq B$.) Έτσι, έχουμε δύο ακολουθίες $\langle u_n \rangle \subseteq U$ και $\langle x_n \rangle \subseteq B$ οι οποίες συνδέονται με τη σχέση

$$u_n = x_n + \frac{\mathbf{1}}{n\mathbf{1}}.$$

Θα δείξουμε ότι η $\langle x_n \rangle$ είναι συγκλίνουσα και $\lim x_n = \sup B$. Για κάθε $m, n \in \mathbb{Z}^+$, οι ανισότητες

$$x_m - x_n \leq u_n - x_n = \frac{\mathbf{1}}{n\mathbf{1}}$$

και

$$x_n - x_m \leq u_m - x_m = \frac{\mathbf{1}}{m\mathbf{1}}$$

συνεπάγονται ότι

$$|x_m - x_n| \leq \max\left\{\frac{\mathbf{1}}{m\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{1}}{n\mathbf{1}}\right\}.$$

Αν $\varepsilon \in F^+$, τότε (επειδή το F είναι αρχιμήδειο) υπάρχει ένα $p \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε $\mathbf{1}/p\mathbf{1} < \varepsilon$, και άρα

$$m, n \geq p \Rightarrow |x_m - x_n| \leq \max\left\{\frac{\mathbf{1}}{m\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{1}}{n\mathbf{1}}\right\} \leq \frac{\mathbf{1}}{p\mathbf{1}} < \varepsilon.$$

Έτσι, η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy και ως εκ τούτου συγκλίνει σε κάποιο $c \in F$ (αφού το F είναι ακολουθιακά πλήρες). Αν $c \notin U$, τότε $c < b$ για κάποιο $b \in B$. Διαλέγοντας ένα $n \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$|x_n - c| < \frac{b-c}{\mathbf{2}} \quad \text{και} \quad \frac{\mathbf{1}}{n\mathbf{1}} < \frac{b-c}{\mathbf{2}},$$

έχουμε

$$x_n - c \leq |x_n - c| < \frac{b-c}{\mathbf{2}}$$

και κατά συνέπεια

$$u_n = x_n + \frac{\mathbf{1}}{n\mathbf{1}} < c + \frac{b-c}{\mathbf{2}} + \frac{b-c}{\mathbf{2}} = b.$$

Επειδή αυτό είναι άτοπο, συμπεραίνουμε ότι $c \in U$. Τέλος, έστω ότι υπάρχει ένα $v \in U$ τέτοιο ώστε $v < c$. Διαλέγοντας ένα $n \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε $|x_n - c| < c - v$, έχουμε

$$c - x_n \leq |x_n - c| < c - v$$

και άρα

$$x_n > v,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $c = \sup B = \sup A$. ■

Αν μια ακολουθία $\langle x_n \rangle \subseteq F$ συγκλίνει στο $\mathbf{0}$, τότε η $\langle x_n \rangle$ λέγεται **μηδενική ακολουθία**.

Άσκηση 3.93 Δείξτε ότι αν η $\langle x_n \rangle \subseteq F$ είναι μηδενική και η $\langle y_n \rangle \subseteq F$ είναι φραγμένη, τότε η $\langle x_n y_n \rangle$ είναι μηδενική.

Εισάγουμε τώρα μερικούς συμβολισμούς:

$$\mathcal{S}_F := \text{το σύνολο όλων των ακολουθιών μέσα στο } F,$$

$$\mathcal{C}_F := \text{το σύνολο των ακολουθιών Cauchy μέσα στο } F,$$

$$\mathcal{N}_F := \text{το σύνολο των μηδενικών ακολουθιών μέσα στο } F.$$

Θεώρημα 3.94 *Έχουμε:*

(i) *Το $\mathcal{S}_F$ εφοδιασμένο με τις πράξεις*

$$\langle x_n \rangle + \langle y_n \rangle := \langle x_n + y_n \rangle\,, \quad \langle x_n \rangle \langle y_n \rangle := \langle x_n y_n \rangle$$

αποτελεί μη τετριμμένο αντιμεταθετικό δακτύλιο. (Τα ουδέτερα στοιχεία για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό είναι οι σταθερές ακολουθίες $\langle \mathbf{0} \rangle$ και $\langle \mathbf{1} \rangle$, αντιστοίχως.)

(ii) *Το $\mathcal{C}_F$ είναι υποδακτύλιος του $\mathcal{S}_F$.*

(iii) *Το $\mathcal{N}_F$ είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες του $\mathcal{C}_F$.*

Απόδειξη (i), (ii): Άσκηση.

(iii): Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.93, είναι εύκολο να δούμε ότι το $\mathcal{N}_F$ είναι ιδεώδες του $\mathcal{C}_F$, και μάλιστα γνήσιο (αφού $\langle \mathbf{1} \rangle \notin \mathcal{N}_F$). Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει γνήσιο ιδεώδες $\mathcal{U}$ του $\mathcal{C}_F$ τέτοιο ώστε $\mathcal{N}_F \subset \mathcal{U}$. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακολουθία $\langle x_n \rangle \in \mathcal{U} - \mathcal{N}_F$. Επειδή η $\langle x_n \rangle$ δεν είναι μηδενική, υπάρχει ένα $\varepsilon_0 \in F^+$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$ υπάρχει ένα $n' \geq n$ τέτοιο ώστε $|x_{n'}| \geq \varepsilon_0$. Επίσης, επειδή η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy, υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon_0}{\mathbf{2}}\,.$$

Αν $n \geq n_0$ και το n' επιλεγεί όπως παραπάνω (δηλαδή έτσι ώστε $n' \geq n$ και $|x_{n'}| \geq \varepsilon_0$), τότε

$$\varepsilon_0 \leq |x_{n'}| = |x_{n'} - x_n + x_n| \leq |x_{n'} - x_n| + |x_n| < \frac{\varepsilon_0}{\mathbf{2}} + |x_n|$$

και άρα

$$\frac{\varepsilon_0}{\mathbf{2}} < |x_n|\,.$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$y_n := \begin{cases} \mathbf{1} & \text{αν } n < n_0, \\ x_n^{-1} & \text{αν } n \geq n_0. \end{cases}$$

Αν $m, n \geq n_0$, τότε

$$|y_m - y_n| = \left|x_m^{-1} - x_n^{-1}\right| = \frac{|x_m - x_n|}{|x_m|\,|x_n|} \leq \frac{|x_m - x_n|\,\mathbf{4}}{\varepsilon_0^2}\,.$$

Αυτό προφανώς συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\langle y_n \rangle$ είναι Cauchy. Έτσι,

$$\langle x_n y_n \rangle = \langle x_n \rangle \langle y_n \rangle \in \mathcal{U}.$$

Αλλά η $\langle x_n y_n \rangle$ συγκλίνει στο $\mathbf{1}$, οπότε

$$\langle x_n y_n \rangle - \langle \mathbf{1} \rangle \in \mathcal{N}_F.$$

Επομένως $\langle \mathbf{1} \rangle \in \mathcal{U}$, το οποίο είναι άτοπο. ∎

Επειδή το $\mathcal{N}_F$ είναι μεγιστικό ιδεώδες του $\mathcal{C}_F$, το πηλίκο $\mathcal{C}_F/\mathcal{N}_F$ είναι σώμα (Θεώρημα 2.117). Χάριν συντομίας, το σώμα αυτό θα συμβολίζεται στο εξής με $\widetilde{F}$, δηλαδή

$$\widetilde{F} := \mathcal{C}_F/\mathcal{N}_F.$$

Επίσης, για κάθε $\langle x_n \rangle \in \mathcal{C}_F$ θέτουμε

$$[\langle x_n \rangle] := \langle x_n \rangle + \mathcal{N}_F.$$

Συνεπώς

$$\widetilde{F} = \{[\langle x_n \rangle] : \langle x_n \rangle \in \mathcal{C}_F\}.$$

Άσκηση 3.95 Δείξτε ότι στο $\widetilde{F}$ ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $[\langle x_n \rangle] = [\langle y_n \rangle] \Leftrightarrow \langle x_n - y_n \rangle \in \mathcal{N}_F$.

(ii) $[\langle x_n \rangle] + [\langle y_n \rangle] = [\langle x_n + y_n \rangle]$.

(iii) $0_{\widetilde{F}} = [\langle \mathbf{0} \rangle] = \mathcal{N}_F$.

(iv) $-[\langle x_n \rangle] = [\langle -x_n \rangle]$.

(v) $[\langle x_n \rangle] - [\langle y_n \rangle] = [\langle x_n - y_n \rangle]$.

(vi) $[\langle x_n \rangle]\,[\langle y_n \rangle] = [\langle x_n y_n \rangle]$.

(vii) $1_{\widetilde{F}} = [\langle \mathbf{1} \rangle]$.

Άσκηση 3.96 Έστω $[\langle x_n \rangle]$ ένα μη μηδενικό στοιχείο του $\widetilde{F}$. Έτσι, για κάποιο $p \in \mathbb{Z}^+$ έχουμε $n > p \Rightarrow x_n \neq \mathbf{0}$. Δείξτε ότι αν $y_1, \ldots, y_p$ είναι τυχαία στοιχεία του F, τότε η ακολουθία $\left\langle y_1, \ldots, y_p, x_{p+1}^{-1}, x_{p+2}^{-1}, x_{p+3}^{-1}, \ldots \right\rangle$ είναι Cauchy και

$$[\langle x_n \rangle]^{-1} = \left[\left\langle y_1, \ldots, y_p, x_{p+1}^{-1}, x_{p+2}^{-1}, x_{p+3}^{-1}, \ldots \right\rangle\right].$$

(**Υπόδειξη**: Δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.94.)

Ο επόμενος στόχος μας είναι να εφοδιάσουμε το $\widetilde{F}$ με μια ολική διάταξη έτσι ώστε να καταστεί διατεταγμένο σώμα. Για τον σκοπό αυτόν χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό: μια ακολουθία $\langle x_n \rangle \in \mathcal{C}_F$ λέγεται **θετική** αν υπάρχουν $\varepsilon_0 \in F^+$ και $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοια ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq \varepsilon_0.$$

Το σύνολο όλων των θετικών ακολουθιών θα συμβολίζεται με $\mathcal{P}_F$, δηλαδή

$$\mathcal{P}_F := \{\langle x_n \rangle \in \mathcal{C}_F : \langle x_n \rangle \text{ είναι θετική}\}.$$

Άσκηση 3.97 Έστω $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathcal{C}_F$. Αποδείξτε τα παρακάτω:

(i) Αν $\langle x_n \rangle \in \mathcal{P}_F$ και $[\langle x_n \rangle] = [\langle y_n \rangle]$, τότε $\langle y_n \rangle \in \mathcal{P}_F$.

(ii) $\langle x_n \rangle \in \mathcal{N}_F \vee \langle x_n \rangle \in \mathcal{P}_F \vee \langle -x_n \rangle \in \mathcal{P}_F$.

(iii) Αν $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathcal{P}_F$, τότε $\langle x_n + y_n \rangle \in \mathcal{P}_F$ και $\langle x_n y_n \rangle \in \mathcal{P}_F$.

Οι Ασκήσεις 3.97 και 2.50 συνεπάγονται ότι το $\widetilde{F}$ μπορεί να εφοδιαστεί με μια ολική διάταξη έτσι ώστε να αποτελεί διατεταγμένο σώμα και το σύνολο των θετικών του στοιχείων να είναι το $\{[\langle x_n \rangle] : \langle x_n \rangle \in \mathcal{P}_F\}$. Έτσι, η διάταξη του $\widetilde{F}$ ικανοποιεί

$$[\langle x_n \rangle] > 0_{\widetilde{F}} \Leftrightarrow \langle x_n \rangle \in \mathcal{P}_F$$

και

$$[\langle x_n \rangle] < [\langle y_n \rangle] \Leftrightarrow \langle y_n - x_n \rangle \in \mathcal{P}_F.$$

Άσκηση 3.98 Δείξτε ότι αν $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathcal{C}_F$ είναι δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq y_n$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, τότε $[\langle x_n \rangle] \leq [\langle y_n \rangle]$.

Άσκηση 3.99 Δείξτε ότι

$$|[\langle x_n \rangle]| = [\langle |x_n| \rangle]$$

για κάθε $\langle x_n \rangle \in \mathcal{C}_F$. (**Υπόδειξη**: Εξετάστε τις τρεις περιπτώσεις $\langle x_n \rangle \in \mathcal{N}_F$, $\langle x_n \rangle \in \mathcal{P}_F$, $\langle -x_n \rangle \in \mathcal{P}_F$.)

Στη συνέχεια ορίζουμε μια συνάρτηση $g : F \longrightarrow \widetilde{F}$ θέτοντας

$$g(x) := [\langle x \rangle] = [\langle x, x, x, \ldots \rangle]$$

για κάθε $x \in F$.

Θεώρημα 3.100 *Έχουμε:*

(i) Η g είναι διαταξιακή εμφύτευση του F στο $\widetilde{F}$ (και άρα το F είναι διαταξιακά ισόμορφο με το υπόσωμα $g[F]$ του $\widetilde{F}$).

(ii) Το $g[F]$ είναι πυκνό μέσα στο $\widetilde{F}$.

(iii) Αν $\langle x_n \rangle \subseteq F$ και η $\langle g(x_n) \rangle$ είναι Cauchy μέσα στο $\widetilde{F}$, τότε $\langle x_n \rangle \in \mathcal{C}_F$.

(iv) Για κάθε $\mathcal{A} = [\langle a_n \rangle] \in \widetilde{F}$, έχουμε $\mathcal{A} = \lim g(a_n)$. (Έτσι, κάθε στοιχείο του $\widetilde{F}$ είναι το όριο μιας ακολουθίας στοιχείων του $g[F]$.)

(v) Το $\widetilde{F}$ είναι ακολουθιακά πλήρες.

Απόδειξη (i): Άσκηση.

(ii): Έστω ότι $[\langle x_n \rangle] < [\langle y_n \rangle]$, όπου $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathcal{C}_F$. Επειδή $\langle y_n - x_n \rangle \in \mathcal{P}_F$, υπάρχουν $\varepsilon_0 \in F^+$ και $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοια ώστε

$$n \geq n_0 \Rightarrow y_n - x_n \geq \varepsilon_0.$$

Διαλέγουμε $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ έτσι ώστε

$$m, n \geq n_1 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon_0}{\mathbf{4}}$$

και

$$m, n \geq n_2 \Rightarrow |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon_0}{\mathbf{4}}.$$

Θέτοντας $p := \max\{n_0, n_1, n_2\}$ και

$$w := \frac{x_p + y_p}{\mathbf{2}},$$

είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $n \geq p$ ισχύουν οι ανισότητες

$$w - x_n \geq \frac{\varepsilon_0}{\mathbf{4}}, \quad y_n - w \geq \frac{\varepsilon_0}{\mathbf{4}}.$$

Επομένως $[\langle x_n \rangle] < g(w) < [\langle y_n \rangle]$.

(iii): Υποθέτοντας ότι $\langle x_n \rangle \subseteq F$ και η $\langle g(x_n) \rangle$ είναι Cauchy μέσα στο $\widetilde{F}$, έστω $\varepsilon \in F^+$. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $g(\varepsilon) > 0_{\widetilde{F}}$ και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |g(x_m) - g(x_n)| < g(\varepsilon).$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.99, είναι εύκολο να δούμε ότι

$$|g(x_m) - g(x_n)| = g(|x_m - x_n|),$$

οπότε

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow g(|x_m - x_n|) < g(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Επομένως $\langle x_n \rangle \in \mathcal{C}_F$.

(iv): Πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathcal{A} = [\langle a_n \rangle]$ είναι το όριο της ακολουθίας

$$\begin{aligned}\langle g(a_n) \rangle &= \langle g(a_1), g(a_2), g(a_3), \ldots \rangle = \langle [\langle a_1 \rangle], [\langle a_2 \rangle], [\langle a_3 \rangle], \ldots \rangle \\ &= \langle [\langle a_1, a_1, a_1, \ldots \rangle],\ [\langle a_2, a_2, a_2, \ldots \rangle],\ [\langle a_3, a_3, a_3, \ldots \rangle],\ \ldots \rangle.\end{aligned}$$

Έστω $\mathcal{E} \in \widetilde{F}^+$. Λόγω του (ii), είναι σαφές ότι υπάρχει ένα $\varepsilon \in F^+$ τέτοιο ώστε

$$g(\varepsilon) < \mathcal{E}.$$

Επίσης, επειδή $\langle a_n \rangle \in \mathcal{C}_F$, υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Αν $k \geq n_0$, τότε

$$\begin{aligned}|g(a_k) - \mathcal{A}| &= |[\langle a_k \rangle] - [\langle a_n \rangle]| = |[\langle a_k - a_n \rangle]| \\ &\underset{\text{Άσκ. 3.99}}{=} [\langle |a_k - a_n| \rangle] \underset{\text{Άσκ. 3.98}}{\leq} [\langle \varepsilon \rangle] = g(\varepsilon) < \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Συνεπώς $\mathcal{A} = \lim g(a_n)$.

(v): Έστω $\langle \mathcal{A}_n \rangle$ μια ακολουθία Cauchy μέσα στο $\widetilde{F}$. Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι η $\langle \mathcal{A}_n \rangle$ συγκλίνει. Αν η $\langle \mathcal{A}_n \rangle$ είναι σταθερή από ένα σημείο και μετά, έχουμε τελειώσει. Στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει υπακολουθία $\langle \mathcal{B}_n \rangle$ της $\langle \mathcal{A}_n \rangle$ τέτοια ώστε $\mathcal{B}_n \neq \mathcal{B}_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Χρησιμοποιώντας το (ii), μπορούμε να διαλέξουμε μια ακολουθία $\langle b_n \rangle \subseteq F$ έτσι ώστε το $g(b_n)$ να βρίσκεται ανάμεσα στα $\mathcal{B}_n$ και $\mathcal{B}_{n+1}$ (για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$). Επειδή η $\langle \mathcal{B}_n \rangle$ είναι Cauchy, βλέπουμε εύκολα ότι και η $\langle g(b_n) \rangle$ είναι Cauchy. Έτσι, σύμφωνα με το (iii), $\langle b_n \rangle \in \mathcal{C}_F$. Θα δείξουμε ότι η $\langle \mathcal{B}_n \rangle$ συγκλίνει στο $[\langle b_n \rangle]$. Αυτό φυσικά αρκεί για να συμπεράνουμε ότι η $\langle \mathcal{A}_n \rangle$ συγκλίνει.

Δοθέντος ενός $\mathcal{E} \in \widetilde{F}^+$, διαλέγουμε $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$ έτσι ώστε

$$k, \ell \geq k_1 \Rightarrow |\mathcal{B}_k - \mathcal{B}_\ell| < \frac{\mathcal{E}}{2_{\widetilde{F}}}$$

και
$$k \geq k_2 \Rightarrow [\langle |b_k - b_n| \rangle] < \frac{\mathcal{E}}{2_{\widetilde{F}}},$$
όπου $2_{\widetilde{F}} = 1_{\widetilde{F}} + 1_{\widetilde{F}}$. (Η ύπαρξη του k_2 αιτιολογείται ως εξής. Πρώτα διαλέγουμε ένα $\varepsilon \in F^+$ τέτοιο ώστε $0_{\widetilde{F}} < g(\varepsilon) < \mathcal{E}/2_{\widetilde{F}}$, και στη συνέχεια διαλέγουμε το k_2 έτσι ώστε $k, \ell \geq k_2 \Rightarrow |b_k - b_\ell| < \varepsilon$. Αν $k \geq k_2$, τότε χρησιμοποιώντας την Άσκηση 3.98 έχουμε $[\langle |b_k - b_n| \rangle] \leq [\langle \varepsilon \rangle] = g(\varepsilon) < \mathcal{E}/2_{\widetilde{F}}$.) Ας υποθέσουμε τώρα ότι $k \geq \max\{k_1, k_2\}$. Τότε
$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_k - [\langle b_n \rangle]| &= |\mathcal{B}_k - g(b_k) + g(b_k) - [\langle b_n \rangle]| \\ \leq |\mathcal{B}_k - g(b_k)| + |g(b_k) - [\langle b_n \rangle]| &= |\mathcal{B}_k - g(b_k)| + |[\langle b_k \rangle] - [\langle b_n \rangle]| \\ = |\mathcal{B}_k - g(b_k)| + |[\langle b_k - b_n \rangle]| &= |\mathcal{B}_k - g(b_k)| + [\langle |b_k - b_n| \rangle] \\ \leq |\mathcal{B}_k - \mathcal{B}_{k+1}| + [\langle |b_k - b_n| \rangle] &< \frac{\mathcal{E}}{2_{\widetilde{F}}} + \frac{\mathcal{E}}{2_{\widetilde{F}}} = \mathcal{E}. \end{aligned}$$
Επομένως η $\langle \mathcal{B}_n \rangle$ συγκλίνει στο $[\langle b_n \rangle]$. ■

Θεώρημα 3.101 *Υπάρχει διατεταγμένο σώμα K το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) Το F είναι υπόσωμα του K και η διάταξη του K επεκτείνει τη διάταξη του F.

(ii) Κάθε στοιχείο του K είναι το όριο μιας ακολουθίας στοιχείων του F.

(iii) Το K είναι ακολουθιακά πλήρες.

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.100, "ταυτίζουμε" το F με το $g[F]$ και παίρνουμε $K = \widetilde{F}$. ■

Ένα διατεταγμένο σώμα όπως το K του προηγούμενου θεωρήματος λέγεται **ακολουθιακή πλήρωση** του F.

Θεώρημα 3.102 *Αν το K είναι μια ακολουθιακή πλήρωση του F, τότε το F είναι πυκνό μέσα στο K.*

Απόδειξη Δοθέντων δύο στοιχείων $x, y \in K$ με $x < y$, διαλέγουμε δύο ακολουθίες $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \subseteq F$ οι οποίες συγκλίνουν στα x, y αντιστοίχως. Επειδή η $\left\langle \frac{x_n + y_n}{\mathbf{2}} \right\rangle$ συγκλίνει στο $\frac{x+y}{\mathbf{2}}$, υπάρχει ένα $p \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε
$$\left| \frac{x_p + y_p}{\mathbf{2}} - \frac{x+y}{\mathbf{2}} \right| < \frac{y - x}{\mathbf{2}}.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$x < \frac{x_p + y_p}{\mathbf{2}} < y.$$

Έτσι, το $\frac{x_p+y_p}{\mathbf{2}}$ είναι ένα στοιχείο του F ανάμεσα στο x και το y. ■

Θεώρημα 3.103 *Αν τα K, K' είναι δύο ακολουθιακές πληρώσεις του F, τότε υπάρχει μοναδικός διαταξιακός ισομορφισμός $f : K \longrightarrow K'$ τέτοιος ώστε $f(x) = x$ για κάθε $x \in F$.*

Απόδειξη Έστω $x \in K$ και $\langle x_n \rangle \subseteq F$ μια ακολουθία η οποία συγκλίνει στο x. Προφανώς η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy μέσα στο F (αφού είναι Cauchy μέσα στο K). Έτσι, επειδή το F είναι πυκνό υποσύνολο του K', η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy μέσα στο K'. Αυτό συνεπάγεται ότι η $\langle x_n \rangle$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο $x' \in K'$. Θέτοντας

$$f(x) := x',$$

είναι εύκολο να δούμε ότι η f έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. ■

Θεώρημα 3.104 *Έστω ότι το K είναι μια ακολουθιακή πλήρωση του F. Τότε το K είναι αρχιμήδειο αν και μόνον αν το F είναι αρχιμήδειο.*

Απόδειξη Με τα Θεωρήματα 3.52 και 3.102. ■

Θεώρημα 3.105 *Έστω ότι το F είναι αρχιμήδειο και το K είναι μια ακολουθιακή πλήρωση του F. Τότε το K είναι πλήρες (και άρα το K είναι διαταξιακά ισόμορφο με το $\mathbb{R}$).*

Απόδειξη Με τα Θεωρήματα 3.104 και 3.92. ■

3.7 Μιγαδικοί αριθμοί

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$, δηλαδή

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2.$$

Θεώρημα 3.106 *Το $\mathbb{C}$ εφοδιασμένο με την παρακάτω δομή αποτελεί σώμα:*

(i) $\langle x, y \rangle + \langle u, v \rangle := \langle x + u,\ y + v \rangle$.

(ii) $0_{\mathbb{C}} := \langle 0, 0 \rangle$.

(iii) $-\langle x, y \rangle := \langle -x, -y \rangle$.

(iv) $\langle x, y\rangle \langle u, v\rangle := \langle xu - yv,\ xv + yu\rangle$.

(v) $1_{\mathbb{C}} := \langle 1, 0\rangle$.

(vi) $\langle x, y\rangle^{-1} := \left\langle \frac{x}{x^2+y^2}\,,\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right\rangle$ (εφόσον $\langle x, y\rangle \neq 0_{\mathbb{C}}$).

Επιπλέον, η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, 0\rangle$ *είναι μια εμφύτευση του* $\mathbb{R}$ *στο* $\mathbb{C}$ *(και άρα* $\mathbb{R} \cong \{\langle x, 0\rangle : x \in \mathbb{R}\}$*).*

Στην πράξη ταυτίζουμε κάθε πραγματικό αριθμό x με τον μιγαδικό αριθμό $\langle x, 0\rangle$ έτσι ώστε το $\mathbb{R}$ να αποτελεί υπόσωμα του $\mathbb{C}$. Επίσης, ταυτίζουμε τη φανταστική μονάδα i με τον μιγαδικό αριθμό $\langle 0, 1\rangle$, δηλαδή

$$i := \langle 0, 1\rangle\,.$$

Θεώρημα 3.107 *Έχουμε:*

(i) $i^2 = -1$.

(ii) $\langle x, y\rangle = x + yi$ *για κάθε* $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$.

(iii) *Το* $\mathbb{C}$ *παράγεται από το* $\mathbb{R} \cup \{i\}$.

Θεώρημα 3.108 *Το* $\mathbb{C}$ *δεν μπορεί να διαταχθεί έτσι ώστε να αποτελεί διατεταγμένο σώμα.*

Απόδειξη Στην αντίθετη περίπτωση θα είχαμε

$$0 \leq i^2 = -1 < 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. ■

Θεώρημα 3.109 *Έστω* K *ένα σώμα και* j *ένα στοιχείο του* K *έτσι ώστε:*

(i) *Το* $\mathbb{R}$ *είναι υπόσωμα του* K.

(ii) $j^2 = -1$.

(iii) *Το* K *παράγεται από το* $\mathbb{R} \cup \{j\}$.

Τότε η συνάρτηση $\langle x, y\rangle \mapsto x + yj$ *είναι ισομορφισμός από το* $\mathbb{C}$ *στο* K.

Κεφάλαιο 4

Αξιωματική θεωρία συνόλων

4.1 Η ανάγκη για αξιώματα

Έστω $\mathcal{R}$ η οικογένεια όλων των συνόλων X τα οποία ικανοποιούν $X \notin X$. Η $\mathcal{R}$ είναι μια τεράστια συλλογή, αφού κάθε "φυσιολογικό" σύνολο (όπως το $\varnothing$ ή το $\{-1, 0, 1\}$ ή το $\mathbb{N}$) ανήκει στην $\mathcal{R}$. Επιχειρώντας να αποφασίσουμε αν η $\mathcal{R}$ είναι μέλος του εαυτού της, οδηγούμαστε στην αντίφαση

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R},$$

η οποία είναι γνωστή ως **παράδοξο του Russell**. Έτσι, πιθανώς λόγω του ασύλληπτου μεγέθους της, η $\mathcal{R}$ δεν αποτελεί σύνολο με τη συνήθη έννοια του όρου. Το δίδαγμα που προκύπτει από το παράδοξο του Russell είναι το εξής: η απλοϊκή αντίληψη ότι χρησιμοποιώντας έναν οποιονδήποτε τύπο $\varphi(x)$ μπορούμε ως διά μαγείας να δημιουργήσουμε το σύνολο $\{x : \varphi(x)\}$ είναι λανθασμένη και άρα πρέπει να αναθεωρηθεί. Αυτό σημαίνει ότι χρειαζόμαστε ορισμένα αξιώματα τα οποία θα ελέγχουν αυστηρά τη δημιουργία συνόλων έτσι ώστε να αποφεύγονται οι λογικές αντινομίες.

Πριν διατυπώσουμε οποιοδήποτε αξίωμα της θεωρίας συνόλων, θα κάνουμε την ακόλουθη βασική παραδοχή:

ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΘΕ ΣΥΝΟΛΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΟΛΑ.

Με άλλα λόγια, ταυτίζουμε τις έννοιες "σύνολο" και "οικογένεια συνόλων". (Παρόλο που η χρήση του όρου "οικογένεια συνόλων" είναι πλέον περιττή, ενίοτε θα χρησιμοποιούμε τον όρο αυτόν για έμφαση.)

Παρατήρηση 4.1 Η παραπάνω παραδοχή μπορεί εκ πρώτης όψεως να φαίνεται αυθαίρετη και αδικαιολόγητα περιοριστική, όμως καλύπτει όλες τις ανάγκες των μαθηματικών και ταυτοχρόνως επιτυγχάνει νοηματική οικονομία.

Συμφωνούμε ότι από εδώ και πέρα όλες οι μεταβλητές θα συμβολίζουν σύνολα, εκτός και αν δηλώσουμε διαφορετικά. Προτασιακοί τύποι της μορφής

$$x \in y \quad \text{ή} \quad x = y$$

λέγονται **ατομικοί τύποι**. Οι **τύποι της θεωρίας συνόλων** είναι οι ατομικοί τύποι καθώς και όλοι οι τύποι που μπορούμε να σχηματίσουμε από αυτούς χρησιμοποιώντας συνδέσμους ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) και ποσοδείκτες ($\forall, \exists, \exists!$). Στο εξής, όποτε μιλάμε για τύπους θα εννοούμε τύπους της θεωρίας συνόλων. Οι τύποι συνήθως συντομεύονται με τη χρήση κατάλληλου συμβολισμού. Για παράδειγμα, αντί για τον τύπο

$$\forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)\,,$$

γράφουμε

$$A \subseteq B.$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι όλες οι μεταβλητές που εμφανίζονται σε έναν τύπο συμβολίζουν σύνολα. Έτσι, γράφοντας π.χ.

$$\exists x\,(x \in y \wedge x \notin \mathcal{F})\,,$$

εννοούμε ότι υπάρχει ένα σύνολο x το οποίο ανήκει στο σύνολο y αλλά δεν ανήκει στο σύνολο $\mathcal{F}$.

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε κάποια βασικά αξιώματα τα οποία επαρκούν για την ανάπτυξη της στοιχειώδους θεωρίας συνόλων. Αργότερα θα χρειαστούμε και μερικά πιο εξειδικευμένα αξιώματα.

Αξίωμα 4.2 (αξίωμα ύπαρξης) *Υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο. Συμβολικά:*

$$\exists x\,(x = x)\,.$$

Αξίωμα 4.3 (αξίωμα έκτασης) *Αν δύο σύνολα έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία, τότε τα σύνολα αυτά είναι ίσα. Συμβολικά:*

$$\forall A \forall B\,[\forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B]\,.$$

Αξίωμα 4.4 (αξίωμα διαχωρισμού) *Έστω $\varphi\left(x, A, \vec{p}\right)$ ένας τύπος (το $\vec{p}$ είναι συντόμευση για κάποια πεπερασμένη ακολουθία μεταβλητών $p_1, \ldots, p_n$). Τότε*

$$\forall A \forall \vec{p} \exists B \forall x \left[x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \varphi\left(x, A, \vec{p}\right)\right].$$

Το αξίωμα διαχωρισμού είναι γνωστό και ως **αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού** διότι στην ουσία αποτελείται από ένα άπειρο πλήθος αξιωμάτων (ένα αξίωμα για κάθε τύπο φ). Ο ρόλος του αξιώματος διαχωρισμού είναι να εγγυηθεί την ύπαρξη του υποσυνόλου

$$B = \left\{x \in A \mid \varphi\left(x, A, \vec{p}\right)\right\},$$

κάθε φορά που δίνεται ο τύπος φ και τα σύνολα $A, \vec{p}$. (Η μοναδικότητα του B είναι εγγυημένη από το αξίωμα έκτασης.)

Η ύπαρξη του κενού συνόλου είναι συνέπεια των αξιωμάτων ύπαρξης και διαχωρισμού:

$$\varnothing = \{x \in A \mid x \neq x\},$$

όπου A ένα τυχαίο σύνολο.

Αξίωμα 4.5 (αξίωμα ζεύγους) *Οποιαδήποτε δύο σύνολα είναι στοιχεία κάποιου συνόλου. Συμβολικά:*

$$\forall a \forall b \exists c \, (a \in c \wedge b \in c).$$

Αν a, b είναι δύο σύνολα, τότε συνδυάζοντας το αξίωμα ζεύγους με το αξίωμα διαχωρισμού συνάγουμε αμέσως την ύπαρξη του συνόλου $\{a, b\}$:

$$\{a, b\} = \{x \in c \mid x = a \vee x = b\},$$

όπου c είναι κάποιο σύνολο τέτοιο ώστε $a, b \in c$. Είναι προφανές τώρα ότι είναι εγγυημένη και η ύπαρξη του $\langle a, b\rangle$ ή γενικότερα του $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$.

Αξίωμα 4.6 (αξίωμα ένωσης) *Για κάθε οικογένεια συνόλων $\mathcal{F}$ υπάρχει ένα σύνολο S το οποίο είναι υπερσύνολο κάθε μέλους της $\mathcal{F}$. Συμβολικά:*

$$\forall \mathcal{F} \exists S \forall A \forall x \, (x \in A \wedge A \in \mathcal{F} \ \Rightarrow\ x \in S)$$

ή πιο απλά

$$\forall \mathcal{F} \exists S \forall A \, (A \in \mathcal{F} \Rightarrow A \subseteq S).$$

Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συνόλων. Το αξίωμα ένωσης (σε συνδυασμό με το αξίωμα διαχωρισμού) συνεπάγεται την ύπαρξη του συνόλου $\bigcup \mathcal{F}$:

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \in S \mid (\exists A \in \mathcal{F})\,(x \in A)\}\,,$$

όπου το S είναι υπερσύνολο κάθε μέλους της $\mathcal{F}$. Φυσικά, η ύπαρξη του συνόλου $\bigcap \mathcal{F}$ (εφόσον $\mathcal{F} \neq \varnothing$) βασίζεται μόνο στο αξίωμα διαχωρισμού.

Αξίωμα 4.7 (αξίωμα δυναμοσυνόλου) *Για κάθε σύνολο A υπάρχει έ-να σύνολο B που περιέχει ως στοιχεία όλα τα υποσύνολα του A. Συμβολικά:*

$$\forall A \exists B \forall X\,(X \subseteq A \Rightarrow X \in B)\,.$$

Ο ρόλος του παραπάνω αξιώματος είναι να εξασφαλίσει, για οποιοδήποτε σύνολο A, την ύπαρξη του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$.

Άσκηση 4.8 Αιτιολογήστε την ύπαρξη των ακόλουθων συνόλων:

(i) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

(ii) $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

(iii) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

(iv) $A - B$.

(v) $A \bigtriangleup B$.

(vi) $A \times B$.

(vii) $\operatorname{dom}(f)$, $\quad \operatorname{ran}(f)$.

(viii) ${}^{A}B$.

(ix) $\prod_{i \in I} A_i$.

4.2 Η έννοια της κλάσης

Έστω $\varphi\left(x, \vec{p}\right)$ μία συνθήκη (δηλαδή ένας τύπος της θεωρίας συνόλων). Η συλλογή όλων των συνόλων x τα οποία ικανοποιούν την εν λόγω συνθήκη συμβολίζεται με

$$\left\{x \mid \varphi\left(x, \vec{p}\right)\right\} \quad \text{ή} \quad \left\{x : \varphi\left(x, \vec{p}\right)\right\}$$

και λέγεται **κλάση** (εξαρτώμενη από τις παραμέτρους $\overrightarrow{p}$). Οι κλάσεις θα συμβολίζονται με έντονα κεφαλαία γράμματα. Έτσι, αν

$$\mathbf{C} = \left\{x \mid \varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right)\right\},$$

τότε στοιχεία της κλάσης $\mathbf{C}$ είναι όλα τα σύνολα x για τα οποία ισχύει η $\varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right)$, δηλαδή

$$\forall x \left[x \in \mathbf{C} \Leftrightarrow \varphi\left(x, \overrightarrow{p}\right)\right].$$

Δύο κλάσεις $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ θεωρούνται ίσες, συμβολικά $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Επίσης, η $\mathbf{A}$ λέγεται **υποκλάση** της $\mathbf{B}$, συμβολικά $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, αν κάθε στοιχείο της $\mathbf{A}$ είναι ταυτοχρόνως και στοιχείο της $\mathbf{B}$. Όπως και για τα σύνολα, έχουμε:

(i) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$.

(ii) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C} \ \Rightarrow\ \mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$.

(iii) $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \ \Rightarrow\ \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Έστω $\mathbf{A}$ μία κλάση. Αν υπάρχει σύνολο S τέτοιο ώστε

$$\forall x \left(x \in \mathbf{A} \Leftrightarrow x \in S\right),$$

τότε το S είναι μοναδικό σύμφωνα με το αξίωμα έκτασης. Στην περίπτωση αυτή ταυτίζουμε την κλάση $\mathbf{A}$ με το σύνολο S και γράφουμε $\mathbf{A} = S$. Αν δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο S, τότε λέμε ότι η $\mathbf{A}$ είναι **γνήσια κλάση**.

Παράδειγμα 4.9 Έστω S ένα τυχαίο σύνολο. Θέτοντας $\mathbf{A} := \{x \mid x \in S\}$, είναι προφανές ότι $\mathbf{A} = S$. Έτσι, κάθε σύνολο είναι κλάση.

Παράδειγμα 4.10 Η $\{x \mid x \notin x\}$ είναι γνήσια κλάση, διότι αν υποθέσουμε ότι $\{x \mid x \notin x\} = S$ για κάποιο σύνολο S, τότε $S \in S \Leftrightarrow S \notin S$ (παράδοξο του Russell).

Άσκηση 4.11 Έστω $\mathbf{A}$ μία κλάση. Δείξτε ότι:

(i) $\varnothing \subseteq \mathbf{A}$.

(ii) $\mathbf{A} = \varnothing \Leftrightarrow \forall x \left(x \notin \mathbf{A}\right)$.

Η ύπαρξη γνήσιων κλάσεων, αν και κάπως ενοχλητική, είναι μια λογική αναγκαιότητα. Στην πράξη φανταζόμαστε κάθε γνήσια κλάση σαν μια αχανή συλλογή συνόλων η οποία λόγω μεγέθους δεν μπορεί να ταυτιστεί με κανένα σύνολο, και άρα δεν μπορεί να εμφανισθεί ως στοιχείο κάποιας κλάσης.

Για ευκολία συχνά επιτρέπουμε έντονα κεφαλαία γράμματα σε τύπους της θεωρίας συνόλων. Έτσι, αν $\mathbf{C} = \{x \mid \varphi(x)\}$ είναι μια κλάση, τότε γράφοντας π.χ. $x \in \mathbf{C} \wedge x \notin y$ εννοούμε $\varphi(x) \wedge x \notin y$. Σε καμία περίπτωση όμως δεν χρησιμοποιούμε ποσοδείκτες της μορφής $\forall \mathbf{A}$, $\exists \mathbf{A}$ ή $\exists! \mathbf{A}$.

Το επόμενο θεώρημα είναι μια εναλλακτική (και πολύ κομψή) διατύπωση του αξιώματος διαχωρισμού:

Θεώρημα 4.12 *Κάθε υποκλάση ενός συνόλου είναι σύνολο.*

Απόδειξη Έστω A ένα σύνολο και $\mathbf{C}$ μια υποκλάση του A. Τότε

$$\mathbf{C} = \{x \in A \mid x \in \mathbf{C}\}$$

και το $\{x \in A \mid x \in \mathbf{C}\}$ είναι σύνολο (χάρη στο αξίωμα διαχωρισμού). ■

Η κλάση

$$\mathbf{V} := \{x \mid x = x\}$$

ονομάζεται **καθολική κλάση** ή **σύμπαν**. Το σύμπαν είναι η συλλογή όλων των συνόλων και κάθε κλάση είναι υποκλάση του σύμπαντος.

Θεώρημα 4.13 *Το σύμπαν είναι γνήσια κλάση.*

Όλες οι έννοιες που αναφέρονται σε σύνολα μπορούν να επεκταθούν και στις κλάσεις, π.χ. η ένωση δύο κλάσεων $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ είναι η κλάση

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} := \{x \mid x \in \mathbf{A} \vee x \in \mathbf{B}\}.$$

Στην πράξη λοιπόν συνήθως μεταχειριζόμαστε τις κλάσεις σαν να είναι σύνολα. Μερικές φορές όμως χρειάζεται λίγη προσοχή. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε

$$\{\mathbf{A}\} := \{x \mid x = \mathbf{A}\}.$$

Αλλά έτσι αν η $\mathbf{A}$ είναι γνήσια κλάση, τότε $\{\mathbf{A}\} = \varnothing$ (διότι δεν υπάρχει σύνολο x ίσο με $\mathbf{A}$).

Άσκηση 4.14 Ορίζοντας

$$\bigcap \mathbf{C} := \{x \mid (\forall A \in \mathbf{C})\,(x \in A)\}$$

για οποιαδήποτε κλάση $\mathbf{C}$, μπορούμε πλέον να θεωρήσουμε την κλάση $\bigcap \varnothing$. Δείξτε ότι

$$\bigcap \varnothing = \mathbf{V}.$$

Μία κλάση διατεταγμένων ζευγών θα λέγεται **διευρυμένη**[1] **σχέση**, και μία διευρυμένη σχέση $\mathbf{F}$ που επιπλέον ικανοποιεί

$$\forall x \forall y \forall z\,[\langle x, y\rangle \in \mathbf{F} \wedge \langle x, z\rangle \in \mathbf{F} \;\Rightarrow\; y = z]$$

θα λέγεται **διευρυμένη συνάρτηση**. Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, η λέξη "διευρυμένη" συνήθως θα παραλείπεται (π.χ. θα λέμε "συνάρτηση" αντί για "διευρυμένη συνάρτηση"). Οι ορισμοί των $\operatorname{dom}(\mathbf{F})$, $\operatorname{ran}(\mathbf{F})$, $\mathbf{F}(x)$, κτλ. είναι φυσικά όπως και στην περίπτωση που η $\mathbf{F}$ είναι σύνολο.

Αυτή είναι η κατάλληλη στιγμή να διατυπώσουμε άλλο ένα αξιωματικό σχήμα (το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο αργότερα):

Αξίωμα 4.15 (αξίωμα αντικατάστασης) *Έστω* $\varphi\left(x, y, A, \overrightarrow{p}\right)$ *ένας τύπος (που για συντομία θα γράφεται ως* φ*). Τότε*

$$\forall A \forall \overrightarrow{p}\,[(\forall x \in A)\,\exists! y \varphi \Rightarrow \exists B\,(\forall x \in A)\,(\exists y \in B)\,\varphi].$$

Στην πράξη το αξίωμα αντικατάστασης εφαρμόζεται συνήθως με τους εξής τρόπους:

- Αν $\mathbf{F}$ είναι μια διευρυμένη συνάρτηση και A είναι ένα σύνολο τέτοιο ώστε $A \subseteq \operatorname{dom}(\mathbf{F})$, τότε η εκόνα $\mathbf{F}[A] = \{\mathbf{F}(x) \mid x \in A\}$ του A μέσω της $\mathbf{F}$ είναι σύνολο.

- Αν $\mathbf{F}$ είναι μια διευρυμένη συνάρτηση και A είναι ένα σύνολο τέτοιο ώστε $A \subseteq \operatorname{dom}(\mathbf{F})$, τότε ο περιορισμός $\mathbf{F}{\restriction}A$ είναι συνάρτηση πάνω στο A.

[1] Η ορολογία αυτή δεν είναι καθιερωμένη.

4.3 Καλώς διατεταγμένες κλάσεις

Έστω $\mathbf{A}$ μια κλάση και $<$ μια (αυστηρή) μερική διάταξη της $\mathbf{A}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

(i) Κάθε μη κενό υποσύνολο της $\mathbf{A}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

(ii) Για κάθε $x \in \mathbf{A}$, η κλάση $\{y \in \mathbf{A} \mid y < x\}$ είναι σύνολο.

Τότε η $<$ λέγεται **καλή διάταξη**. Παρατηρούμε ότι αν η $\mathbf{A}$ είναι σύνολο, ο ορισμός αυτός συμφωνεί με τον παλαιότερο ορισμό της καλής διάταξης. Επίσης, η $<$ προφανώς είναι ολική διάταξη.

Άσκηση 4.16 Έστω $\mathbf{A}$ μια γνήσια κλάση και $<$ μια ολική διάταξη της $\mathbf{A}$. Δείξτε ότι:

(i) Η $<$ είναι γνήσια κλάση.

(ii) $\langle \mathbf{A}, < \rangle = \{\varnothing\}$.

Έστω $<$ μια καλή διάταξη της $\mathbf{A}$. Η προηγούμενη άσκηση συνεπάγεται ότι οι κλάσεις $\mathbf{A}$ και $<$ δεν είναι δυνατό να ανακτηθούν από το διατεταγμένο ζεύγος $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ αν η $\mathbf{A}$ είναι γνήσια κλάση. Συμφωνούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μόνον ως σχήμα λόγου. Όποτε λέμε ότι $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ είναι μια **καλώς διατεταγμένη κλάση** θα εννοούμε ότι η $\mathbf{A}$ είναι μια κλάση και η $<$ είναι μια καλή διάταξη της $\mathbf{A}$. Ομοίως, όποτε λέμε ότι $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ είναι μια **καλώς διατεταγμένη γνήσια κλάση** θα εννοούμε ότι η $\mathbf{A}$ είναι μια γνήσια κλάση και η $<$ είναι μια καλή διάταξη της $\mathbf{A}$.

Άσκηση 4.17 Δείξτε ότι αν $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ είναι μια καλώς διατεταγμένη κλάση και $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, τότε ο περιορισμός της $<$ στην $\mathbf{B}$ είναι μια καλή διάταξη της $\mathbf{B}$.

Αν $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ είναι μια καλώς διατεταγμένη κλάση και $x \in \mathbf{A}$, τότε το σύνολο $\{y \in \mathbf{A} \mid y < x\}$ συμβολίζεται με $\mathbf{A}_x$, δηλαδή

$$\mathbf{A}_x := \{y \in \mathbf{A} \mid y < x\}.$$

Άσκηση 4.18 Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση και έστω $x, y \in \mathbf{A}$. Δείξτε ότι:

(i) $x = y \Leftrightarrow \mathbf{A}_x = \mathbf{A}_y$.

(ii) $x < y \Leftrightarrow \mathbf{A}_x \subset \mathbf{A}_y$.

(iii) $x \leq y \Leftrightarrow \mathbf{A}_x \subseteq \mathbf{A}_y$.

(iv) $x < y \Rightarrow \mathbf{A}_x = (\mathbf{A}_y)_x$.

Θεώρημα 4.19 (αρχή του ελάχιστου στοιχείου)
Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση. Τότε κάθε μη κενή υποκλάση της $\mathbf{A}$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη Υποθέτοντας ότι $\mathbf{B}$ είναι μια μη κενή υποκλάση της $\mathbf{A}$, διαλέγουμε ένα $x \in \mathbf{B}$. Αν $x = \min \mathbf{B}$, τελειώσαμε. Στην αντίθετη περίπτωση η τομή $\mathbf{B} \cap \mathbf{A}_x$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο της $\mathbf{A}$ και άρα έχει ένα ελάχιστο στοιχείο y. Είναι εύκολο να δούμε ότι $y = \min \mathbf{B}$. ∎

Θεώρημα 4.20 (αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής)
Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση και έστω $\mathbf{C}$ μια κλάση τέτοια ώστε

$$(\forall x \in \mathbf{A})\,(\mathbf{A}_x \subseteq \mathbf{C} \Rightarrow x \in \mathbf{C})\,.$$

Τότε $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$.

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{A} \nsubseteq \mathbf{C}$. Τότε, σύμφωνα με την αρχή του ελάχιστου στοιχείου, υπάρχει ένα ελάχιστο $x \in \mathbf{A}$ τέτοιο ώστε $x \notin \mathbf{C}$. Είναι προφανές ότι $\mathbf{A}_x \subseteq \mathbf{C}$. Συνεπώς $x \in \mathbf{C}$ και έτσι έχουμε άτοπο. ∎

Παρατήρηση 4.21 Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$, όπου $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ είναι μια καλώς διατεταγμένη κλάση και $\mathbf{C}$ είναι κάποια άλλη κλάση. Χάρη στην αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι οι υποθέσεις $x \in \mathbf{A}$ και $\mathbf{A}_x \subseteq \mathbf{C}$ οδηγούν στο συμπέρασμα $x \in \mathbf{C}$. Η υπόθεση $\mathbf{A}_x \subseteq \mathbf{C}$ (που είναι "δωρεάν") λέγεται **επαγωγική υπόθεση**.

Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση. Μια υποκλάση $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$ λέγεται **αρχικό τμήμα** της $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ αν

$$(\forall x, y \in \mathbf{A})\,(x \in \mathbf{B} \wedge y < x \ \Rightarrow \ y \in \mathbf{B})\,.$$

Αν η $\mathbf{B}$ είναι αρχικό τμήμα της $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ και επιπλέον $\mathbf{B} \neq \mathbf{A}$, τότε η $\mathbf{B}$ λέγεται **γνήσιο αρχικό τμήμα** της $\langle \mathbf{A}, < \rangle$.

Θεώρημα 4.22 *Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση. Τότε για κάθε $x \in \mathbf{A}$, το $\mathbf{A}_x$ είναι ένα γνήσιο αρχικό τμήμα της $\langle \mathbf{A}, < \rangle$. Αντίστροφα, για κάθε γνήσιο αρχικό τμήμα $\mathbf{B}$ της $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ υπάρχει ένα $x \in \mathbf{A}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{B} = \mathbf{A}_x$.*

Απόδειξη Το πρώτο μέρος του θεωρήματος είναι προφανές. Για το δεύτερο μέρος, αν $\mathbf{B}$ είναι ένα γνήσιο αρχικό τμήμα της $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ και x είναι το ελάχιστο στοιχείο της $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, τότε έχουμε $\mathbf{B} = \mathbf{A}_x$. ■

Άσκηση 4.23 Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbf{A}$, το σύνολο $\mathbf{A}_x \cup \{x\}$ είναι αρχικό τμήμα της $\langle \mathbf{A}, < \rangle$.

Θεώρημα 4.24 (αρχή της υπερπεπερασμένης αναδρομής) *Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση και $\mathbf{F} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ μια (διευρυμένη) συνάρτηση. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\mathbf{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{V}$ τέτοια ώστε*

$$(\forall x \in \mathbf{A}) \left[\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction \mathbf{A}_x) \right].$$

Απόδειξη Για τη μοναδικότητα, αν δύο συναρτήσεις $\mathbf{G}_1$ και $\mathbf{G}_2$ πάνω στην $\mathbf{A}$ ικανοποιούν τη συνθήκη του θεωρήματος, τότε χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη επαγωγή έχουμε

$$(\forall x \in \mathbf{A}) \left[\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{G}_2(x) \right].$$

Για την ύπαρξη χρειαζόμαστε έναν ορισμό: αν $x \in \mathbf{A}$, τότε με τον όρο **x-προσέγγιση** εννοούμε μια συνάρτηση g πάνω στο σύνολο $\mathbf{A}_x \cup \{x\}$ τέτοια ώστε

$$(\forall y \in \mathbf{A}_x \cup \{x\}) \left[g(y) = \mathbf{F}(g \restriction \mathbf{A}_y) \right].$$

Είναι εύκολο να δούμε (όπως στην απόδειξη της μοναδικότητας) ότι αν η g είναι μια x-προσέγγιση και η g' είναι μια x'-προσέγγιση, τότε οι g, g' είναι συμβατές, δηλαδή $g(y) = g'(y)$ για κάθε $y \in \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(g')$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbf{A}$ υπάρχει (μοναδική) x-προσέγγιση. Η απόδειξη είναι με υπερπεπερασμένη επαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι $x \in \mathbf{A}$ και για κάθε $y \in \mathbf{A}_x$ υπάρχει (μοναδική) y-προσέγγιση g_y. Η

$$h := \bigcup_{y \in \mathbf{A}_x} g_y$$

είναι μια συνάρτηση με $\mathrm{dom}(h) = \mathbf{A}_x$. Θέτοντας τώρα

$$g := h \cup \{\langle x, \mathbf{F}(h) \rangle\},$$

βλέπουμε εύκολα ότι η g είναι μια x-προσέγγιση (και φυσικά η μοναδική).

Τέλος, ορίζουμε την $\mathbf{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{V}$ έτσι ώστε $\mathbf{G}(x)$ να είναι η τιμή $g(x)$, όπου g είναι η μοναδική x-προσέγγιση. Η $\mathbf{G}$ προφανώς ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος. ■

Θεώρημα 4.25 *Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση και $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε $\mathbf{F}(x) \geq x$ για κάθε $x \in \mathbf{A}$.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{F}(x) < x$ για κάποιο $x \in \mathbf{A}$. Τότε υπάρχει ένα ελάχιστο $x_0 \in \mathbf{A}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{F}(x_0) < x_0$. Επειδή η $\mathbf{F}$ είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $\mathbf{F}(\mathbf{F}(x_0)) < \mathbf{F}(x_0)$. Αυτό όμως είναι άτοπο (λόγω της ελαχιστότητας του x_0). ∎

Θεώρημα 4.26 *Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση και έστω $x \in \mathbf{A}$. Τότε $\langle \mathbf{A}, < \rangle \ncong \langle \mathbf{A}_x, < \rangle$.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_x$ η οποία είναι ισομορφισμός από την $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ στο $\langle \mathbf{A}_x, < \rangle$. Τότε $\mathbf{F}(x) \in \mathbf{A}_x$ και άρα $\mathbf{F}(x) < x$. Αυτό όμως αντιβαίνει στο Θεώρημα 4.25. ∎

Άσκηση 4.27 Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ μια καλώς διατεταγμένη κλάση και έστω $x, y \in \mathbf{A}$. Δείξτε ότι $x = y \Leftrightarrow \langle \mathbf{A}_x, < \rangle \cong \langle \mathbf{A}_y, < \rangle$.

Θεώρημα 4.28 *Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ και $\langle \mathbf{B}, < \rangle$ δύο καλώς διατεταγμένες κλάσεις. Τότε υπάρχει το πολύ ένας ισομορφισμός από την $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ στην $\langle \mathbf{B}, < \rangle$.*

Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ και $\mathbf{G} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ είναι δύο διαφορετικοί ισομορφισμοί από την $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ στην $\langle \mathbf{B}, < \rangle$. Έστω x_0 το ελάχιστο στοιχείο της $\mathbf{A}$ για το οποίο ισχύει $\mathbf{F}(x_0) \neq \mathbf{G}(x_0)$. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $\mathbf{F}(x_0) < \mathbf{G}(x_0)$. Διαλέγοντας το $x_1 \in \mathbf{A}$ έτσι ώστε $\mathbf{G}(x_1) = \mathbf{F}(x_0)$, έχουμε $\mathbf{G}(x_1) < \mathbf{G}(x_0)$ και άρα $x_1 < x_0$. Η ελαχιστότητα του x_0 συνεπάγεται τώρα ότι

$$\mathbf{F}(x_1) = \mathbf{G}(x_1) = \mathbf{F}(x_0),$$

πράγμα που φυσικά είναι άτοπο. ∎

Άσκηση 4.29 Έστω $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ ένας ισομορφισμός μεταξύ δύο καλώς διατεταγμένων κλάσεων $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ και $\langle \mathbf{B}, < \rangle$, και έστω $x \in \mathbf{A}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mathbf{F} \restriction \mathbf{A}_x$ είναι ισομορφισμός από το $\langle \mathbf{A}_x, < \rangle$ στο $\left\langle \mathbf{B}_{\mathbf{F}(x)}, < \right\rangle$.

Θεώρημα 4.30 *Έστω $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ και $\langle \mathbf{B}, < \rangle$ δύο καλώς διατεταγμένες κλάσεις. Τότε ισχύει ακριβώς μία από τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) $\langle \mathbf{A}, < \rangle \cong \langle \mathbf{B}, < \rangle$.

(ii) $\langle \mathbf{A}, < \rangle \cong \langle \mathbf{B}_y, < \rangle$ *για κάποιο* $y \in \mathbf{B}$.

(iii) $\langle \mathbf{B}, < \rangle \cong \langle \mathbf{A}_x, < \rangle$ *για κάποιο* $x \in \mathbf{A}$.

Απόδειξη Το ότι ισχύει το πολύ μία από τις τρεις δοθείσες συνθήκες είναι προφανής συνέπεια του Θεωρήματος 4.26. Για να δείξουμε ότι ισχύει τουλάχιστον μία, θεωρούμε την κλάση

$$\mathbf{F} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbf{A} \times \mathbf{B} : \langle \mathbf{A}_x, < \rangle \cong \langle \mathbf{B}_y, < \rangle\}.$$

Με λίγη προσπάθεια μπορούμε να δούμε ότι η $\mathbf{F}$ είναι ένας ισομορφισμός από κάποιο αρχικό τμήμα της $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ σε κάποιο αρχικό τμήμα της $\langle \mathbf{B}, < \rangle$, και τα δύο αυτά αρχικά τμήματα αποκλείεται να είναι γνήσια ταυτοχρόνως. ■

Άσκηση 4.31 Δείξτε ότι αν $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ και $\langle \mathbf{B}, < \rangle$ είναι δύο καλώς διατεταγμένες γνήσιες κλάσεις, τότε $\langle \mathbf{A}, < \rangle \cong \langle \mathbf{B}, < \rangle$.

Άσκηση 4.32 Δείξτε ότι αν $\langle A, < \rangle$ είναι ένα καλώς διατεταγμένο σύνολο και $\langle \mathbf{B}, < \rangle$ είναι μια καλώς διατεταγμένη γνήσια κλάση, τότε $\langle A, < \rangle \cong \langle \mathbf{B}_y, < \rangle$ για κάποιο $y \in \mathbf{B}$.

4.4 Διατακτικοί αριθμοί

Για οποιαδήποτε κλάση $\mathbf{C}$, είναι προφανές ότι οι ακόλουθες τρεις συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $\forall x \forall y \, (x \in y \wedge y \in \mathbf{C} \;\Rightarrow\; x \in \mathbf{C})$.

(ii) $(\forall y \in \mathbf{C}) \, (y \subseteq \mathbf{C})$.

(iii) $\bigcup \mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}$.

Μια κλάση που ικανοποιεί τις ισοδύναμες αυτές συνθήκες λέγεται **μεταβατική κλάση** (και φυσικά μια μεταβατική κλάση η οποία είναι σύνολο θα λέγεται **μεταβατικό σύνολο**).

Ένα σύνολο A λέγεται **διατακτικός αριθμός** αν το A είναι μεταβατικό και καλώς διατεταγμένο από την $\in$. Λέγοντας ότι το A είναι καλώς διατεταγμένο από την $\in$, εννοούμε ότι η διμελής σχέση

$$\in_A := \left\{ \langle x, y \rangle \in A^2 \mid x \in y \right\}$$

πάνω στο A είναι μια (αυστηρή) καλή διάταξη του A.

Παράδειγμα 4.33 Τα σύνολα

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

είναι διατακτικοί αριθμοί, ενώ το σύνολο

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$$

είναι μεταβατικό αλλά δεν είναι διατακτικός αριθμός.

Όταν αναφερόμαστε σε κάποιον διατακτικό αριθμό A, συνήθως παραλείπουμε να αναφέρουμε τη διάταξη $\in_A$, π.χ. γράφουμε $A \cong \langle B, < \rangle$ αντί για $\langle A, \in_A \rangle \cong \langle B, < \rangle$.

Θεώρημα 4.34 *Έχουμε:*

(i) *Αν A είναι διατακτικός αριθμός, τότε $A \notin A$.*

(ii) *Αν A είναι διατακτικός αριθμός και $x \in A$, τότε το x είναι διατακτικός αριθμός και $x = A_x$.*

(iii) *Αν A και B είναι διατακτικοί αριθμοί, τότε $A \in B \Leftrightarrow A \subset B$.*

(iv) *Αν $\mathbf{X}$ είναι μια μη κενή κλάση διατακτικών αριθμών, τότε το σύνολο $A = \bigcap \mathbf{X}$ είναι το $\in$-ελάχιστο στοιχείο της $\mathbf{X}$, δηλαδή $A \in \mathbf{X}$ και για κάθε $B \in \mathbf{X}$ έχουμε $A \in B \vee A = B$.*

Απόδειξη (i): Έστω ότι $A \in A$, όπου το A είναι διατακτικός αριθμός. Τότε $A \in_A A$, το οποίο είναι άτοπο (αφού η $\in_A$ είναι καλή διάταξη του A).

(ii): Έστω ότι $x \in A$, όπου το A είναι διατακτικός αριθμός. Αν $z \in y \in x$, τότε τα x, y, z είναι στοιχεία του A με $z \in_A y \in_A x$, και άρα $z \in_A x$. Αυτό δείχνει ότι το x είναι μεταβατικό. Επιπλέον, επειδή $x \subseteq A$, το x είναι καλώς διατεταγμένο από την $\in$. Συνεπώς το x είναι διατακτικός αριθμός. Η ισότητα $x = A_x$ είναι προφανής.

(iii): Άσκηση. (Αν A και B είναι διατακτικοί αριθμοί με $A \subset B$, τότε ο A είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του B.)

(iv): Έστω $\mathbf{X}$ μια μη κενή κλάση διατακτικών αριθμών και $A = \bigcap \mathbf{X}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το A είναι διατακτικός αριθμός. Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι $A \notin \mathbf{X}$. Τότε $(\forall B \in \mathbf{X})\,(A \subset B)$, δηλαδή $(\forall B \in \mathbf{X})\,(A \in B)$, και άρα $A \in \bigcap \mathbf{X} = A$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Επομένως $A \in \mathbf{X}$. Τέλος, η $\in$-ελαχιστότητα του A είναι προφανής. ∎

Η κλάση όλων των διατακτικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbf{ON}$, δηλαδή

$$\mathbf{ON} := \{x \mid x \text{ είναι διατακτικός αριθμός}\}.$$

Θεώρημα 4.35 *Η κλάση* $\mathbf{ON}$ *είναι μεταβατική και καλώς διατεταγμένη από την* $\in$.

Θεώρημα 4.36 *Η* $\mathbf{ON}$ *είναι γνήσια κλάση.*

Απόδειξη Έστω ότι η $\mathbf{ON}$ είναι σύνολο και άρα διατακτικός αριθμός. Τότε $\mathbf{ON} \in \mathbf{ON}$ και έτσι έχουμε άτοπο. (Το άτοπο αυτό είναι γνωστό ως **παράδοξο του Burali-Forti**). ■

Άσκηση 4.37 Δείξτε ότι $x = \mathbf{ON}_x$ για κάθε $x \in \mathbf{ON}$.

Άσκηση 4.38 Δείξτε ότι αν μια γνήσια κλάση $\mathbf{A}$ είναι μεταβατική και καλώς διατεταγμένη από την $\in$, τότε $\mathbf{A} = \mathbf{ON}$.

Από εδώ και πέρα οι διατακτικοί αριθμοί θα συμβολίζονται με μικρά ελληνικά γράμματα (συνήθως $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta$), οπότε γράφοντας π.χ.

$$\forall \alpha \varphi(\alpha),$$

όπου $\varphi(x)$ ένας τύπος, θα εννοούμε

$$\forall x [x \in \mathbf{ON} \Rightarrow \varphi(x)].$$

Επίσης, αντί για $\alpha \in \beta$ θα γράφουμε $\alpha < \beta$ και θα χρησιμοποιούμε τις συνήθεις συμβάσεις που ισχύουν για μια σχέση διάταξης. Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta,$$

$$\alpha \leq \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subseteq \beta.$$

Άσκηση 4.39 Έστω α και β δύο διατακτικοί αριθμοί. Δείξτε ότι $\alpha \leq \beta$ αν και μόνον αν υπάρχει μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \alpha \longrightarrow \beta$.

Θεώρημα 4.40 (αρχή ελάχιστου στοιχείου για την ON)
Κάθε μη κενή υποκλάση της $\mathbf{ON}$ *έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.*

Θεώρημα 4.41 (υπερπεπερασμένη επαγωγή για την ON)
Αν $\mathbf{C}$ *είναι μια κλάση τέτοια ώστε*

$$\forall \alpha (\alpha \subseteq \mathbf{C} \Rightarrow \alpha \in \mathbf{C}),$$

τότε $\mathbf{ON} \subseteq \mathbf{C}$.

Θεώρημα 4.42 (υπερπεπερασμένη αναδρομή για την ON) *Έστω* $\mathbf{F} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ *μια συνάρτηση. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση* $\mathbf{G} : \mathbf{ON} \longrightarrow \mathbf{V}$ *τέτοια ώστε*

$$\forall \alpha \left[\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G} \restriction \alpha) \right].$$

Θεώρημα 4.43 *Αν* X *είναι ένα σύνολο διατακτικών αριθμών, τότε το σύνολο* $\bigcup X$ *είναι διατακτικός αριθμός και* $\bigcup X = \sup X$.

Θεώρημα 4.44 *Αν* $\alpha \cong \beta$, *τότε* $\alpha = \beta$.

Απόδειξη Με την Άσκηση 4.39. ■

Θεώρημα 4.45 *Έστω* A *ένα καλώς διατεταγμένο σύνολο. Τότε υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός* α *τέτοιος ώστε* $A \cong \alpha$.

Απόδειξη Η μοναδικότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 4.44. Για την ύπαρξη, θεωρούμε το σύνολο

$$B = \{x \in A : \exists \xi \, (A_x \cong \xi)\}$$

το οποίο προφανώς είναι αρχικό τμήμα του A. Το αξίωμα αντικατάστασης εγγυάται την ύπαρξη της συνάρτησης $f : B \longrightarrow \mathbf{ON}$ με τύπο

$$\begin{aligned} f(x) = &\text{ ο μοναδικός διατακτικός αριθμός} \\ &\xi \text{ τέτοιος ώστε } A_x \cong \xi. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι το πεδίο τιμών της f είναι ένας διατακτικός αριθμός α και η f είναι ισομορφισμός από το B στο α. Τέλος, παρατηρούμε ότι το B δεν μπορεί να είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του A. Συνεπώς $B = A$ και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Αν A είναι ένα καλώς διατεταγμένο σύνολο, τότε ο μοναδικός διατακτικός αριθμός α τέτοιος ώστε $A \cong \alpha$ λέγεται **διατακτικός τύπος** του A και συμβολίζεται με

$$\operatorname{ord}(A).$$

Παρατήρηση 4.46 Για κάθε διατακτικό αριθμό α, έχουμε

$$\operatorname{ord}(\alpha) = \alpha.$$

Επίσης, δύο καλώς διατεταγμένα σύνολα A και B είναι ισόμορφα αν και μόνον αν $\operatorname{ord}(A) = \operatorname{ord}(B)$.

Άσκηση 4.47 Δείξτε ότι αν το A είναι ένα καλώς διατεταγμένο σύνολο και $B \subseteq A$, τότε $\mathrm{ord}\,(B) \leq \mathrm{ord}\,(A)$. (**Υπόδειξη**: Άσκηση 4.39.)

Η **πράξη διαδοχής** $\mathrm{Sc} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ ορίζεται από τον τύπο

$$\mathrm{Sc}\,(x) := x \cup \{x\}\,.$$

Άσκηση 4.48 Δείξτε ότι η $\mathrm{Sc}\restriction\mathbf{ON}$ είναι $1-1$.

Θεώρημα 4.49 *Έστω α ένας διατακτικός αριθμός. Τότε:*

(i) *Το σύνολο $\mathrm{Sc}\,(\alpha)$ είναι διατακτικός αριθμός.*

(ii) $\alpha < \mathrm{Sc}\,(\alpha)$.

(iii) *Δεν υπάρχει διατακτικός αριθμός β τέτοιος ώστε $\alpha < \beta < \mathrm{Sc}\,(\alpha)$.*

Θεώρημα 4.50 *Έστω α, β δύο διατακτικοί αριθμοί. Τότε:*

(i) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \mathrm{Sc}\,(\alpha) \leq \beta$.

(ii) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \mathrm{Sc}\,(\beta)$.

Οι διατακτικοί αριθμοί $0, 1, 2, 3, \ldots$ ορίζονται ως εξής:

$$0 := \varnothing,$$

$$1 := \mathrm{Sc}\,(0) = \{0\}\,,$$
$$2 := \mathrm{Sc}\,(1) = \{0, 1\}\,,$$
$$3 := \mathrm{Sc}\,(2) = \{0, 1, 2\}\,,$$

κ.ο.κ. Παρατηρούμε ότι το 0 είναι ο πρώτος (δηλαδή ο ελάχιστος) διατακτικός αριθμός, το 1 είναι ο δεύτερος διατακτικός αριθμός, το 2 είναι ο τρίτος διατακτικός αριθμός, κτλ.

Ένας διατακτικός αριθμός της μορφής $\mathrm{Sc}\,(\alpha)$ λέγεται **διάδοχος διατακτικός αριθμός**. Ένας διατακτικός αριθμός ο οποίος δεν είναι 0 ή διάδοχος λέγεται **οριακός διατακτικός αριθμός**.

Άσκηση 4.51 Δείξτε ότι ένας διατακτικός αριθμός α είναι οριακός αν και μόνον αν $\alpha \neq 0$ και $\sup \alpha = \alpha$ (δηλαδή $\bigcup \alpha = \alpha$).

Θα δώσουμε τώρα αυστηρούς ορισμούς για τρεις βασικές έννοιες τις οποίες μέχρι τώρα αντιλαμβανόμασταν διαισθητικά:

- Ένας διατακτικός αριθμός α λέγεται **φυσικός αριθμός** αν κάθε διατακτικός $\beta \leq \alpha$ είναι 0 ή διάδοχος διατακτικός. Έτσι, οι διατακτικοί $0, 1, 2, 3, \ldots$ είναι φυσικοί αριθμοί. Οι φυσικοί αριθμοί συνήθως συμβολίζονται με τα γράμματα n, m, i, j, k.

- Ένα σύνολο A λέγεται **πεπερασμένο σύνολο** αν υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $A \approx n$.

- Ένα μη πεπερασμένο σύνολο λέγεται **άπειρο σύνολο**.

Θεώρημα 4.52 *Έστω n ένας φυσικός αριθμός και α ένας διατακτικός αριθμός. Τότε:*

(i) *Κάθε στοιχείο του n είναι φυσικός αριθμός.*

(ii) *Ο $\mathrm{Sc}\,(n)$ είναι φυσικός αριθμός.*

(iii) $\mathrm{Sc}\,(n) \not\precsim n$.

(iv) $\alpha \approx n \Rightarrow \alpha = n$.

(v) *Ο α είναι πεπερασμένος (δηλαδή πεπερασμένο σύνολο) αν και μόνον αν ο α είναι φυσικός αριθμός.*

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο το (iii), αφήνοντας τα υπόλοιπα μέρη ως άσκηση. Αν $\mathrm{Sc}\,(n) \precsim n$, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο n είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα. Προφανώς $n \neq 0$, άρα $n = \mathrm{Sc}\,(m)$ για γάποιον φυσικό $m < n$. Επειδή $\mathrm{Sc}\,(n) \precsim n = \mathrm{Sc}\,(m)$, υπάρχει μια ένριψη $f : \mathrm{Sc}\,(n) \longrightarrow \mathrm{Sc}\,(m)$. Αν $m \notin \mathrm{ran}\,(f)$, τότε η $f \restriction \mathrm{Sc}\,(m)$ είναι μια ένριψη από τον $\mathrm{Sc}\,(m)$ στον m, πράγμα αδύνατο (λόγω της ελαχιστότητας του n). Έτσι, $m \in \mathrm{ran}\,(f)$ και άρα μπορούμε να υποθέσουμε (τροποποιώντας την f αν χρειάζεται) ότι $f\,(n) = m$. Αυτό όμως συνεπάγεται ότι πάλι η $f \restriction \mathrm{Sc}\,(m)$ είναι μια ένριψη από τον $\mathrm{Sc}\,(m)$ στον m, δηλαδή άτοπο. ∎

Θεώρημα 4.53 *Κάθε υποσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υποσύνολο A ενός φυσικού αριθμού n είναι πεπερασμένο. Από την Άσκηση 4.47 έχουμε $\mathrm{ord}\,(A) \leq \mathrm{ord}\,(n) = n$, οπότε ο $\operatorname{ord}(A)$ είναι φυσικός αριθμός. Έτσι, αφού $A \approx \operatorname{ord}(A)$, το A είναι πεπερασμένο. ∎

Ένα σύνολο A λέγεται **επαγωγικό** αν

$$0 \in A \quad (\text{δηλαδή } \varnothing \in A)$$

και

$$(\forall x \in A)\left[\operatorname{Sc}(x) \in A\right].$$

Η έννοια αυτή δεν πρέπει φυσικά να συγχέεται με την έννοια του επαγωγικού υποσυνόλου ενός δακτυλίου.

Θεώρημα 4.54 *Έχουμε:*

(i) *Κάθε οριακός διατακτικός αριθμός είναι επαγωγικό σύνολο.*

(ii) *Αν A είναι ένα επαγωγικό σύνολο, τότε κάθε φυσικός αριθμός είναι στοιχείο του A.*

(iii) *Κάθε επαγωγικό σύνολο είναι άπειρο.*

Απόδειξη (i), (ii): Άσκηση.

(iii): Έστω A ένα επαγωγικό σύνολο και ας υποθέσουμε ότι $A \approx n$ για κάποιον φυσικό αριθμό n. Από το (ii) έχουμε $\operatorname{Sc}(n) \subseteq A$ και άρα $\operatorname{Sc}(n) \precsim n$, το οποίο είναι άτοπο. ∎

Θεώρημα 4.55 *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) *Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.*

(ii) *Υπάρχει ένα άπειρο σύνολο.*

(iii) *Η κλάση όλων των φυσικών αριθμών είναι σύνολο.*

(iv) *Υπάρχει ένας οριακός διατακτικός αριθμός.*

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο τη συνεπαγωγή (ii) $\Rightarrow$ (iii). Έστω A ένα άπειρο σύνολο και έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του A. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα αντικατάστασης, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση g πάνω στο $\mathcal{F}$ έτσι ώστε, για κάθε $X \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} g(X) = &\text{ ο μοναδικός φυσικός αριθμός} \\ &\ n \text{ τέτοιος ώστε } X \approx n. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η κλάση όλων των φυσικών αριθμών ταυτίζεται με το σύνολο $\operatorname{ran}(g)$. ∎

Αξίωμα 4.56 (αξίωμα απειρότητας) *Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.*

Χάρη στο αξίωμα απειρότητας, η κλάση όλων των φυσικών αριθμών είναι σύνολο. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με ω, δηλαδή

$$\omega := \{x \mid x \text{ είναι φυσικός αριθμός}\}.$$

Έτσι, $\mathbb{N}$ και ω είναι ακριβώς το ίδιο πράγμα (αλλά στην αξιωματική θεωρία συνόλων, το γράμμα ω έχει καθιερωθεί ως το σύμβολο με το οποίο συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών).

Θεώρημα 4.57 *Το ω είναι ο ελάχιστος οριακός διατακτικός αριθμός.*

Θεώρημα 4.58 *Ο περιορισμός $\mathrm{Sc}\restriction\omega$ είναι μια μονομελής πράξη πάνω στο ω και η διατεταγμένη τριάδα $\langle\omega, \mathrm{Sc}\restriction\omega, 0\rangle$ είναι ένα σύστημα Peano (το οποίο έχει ήδη εμφανισθεί στο Παράδειγμα 3.3).*

Η υπερπεπερασμένη επαγωγή και αναδρομή για την $\mathbf{ON}$ συχνά χρησιμοποιούνται με τη μορφή των δύο επόμενων θεωρημάτων:

Θεώρημα 4.59 *Έστω $\mathbf{C}$ μια κλάση η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $0 \in \mathbf{C}$.

(ii) $\alpha \in \mathbf{C} \Rightarrow \mathrm{Sc}(\alpha) \in \mathbf{C}$, *για κάθε διατακτικό αριθμό α.*

(iii) $\alpha \subseteq \mathbf{C} \Rightarrow \alpha \in \mathbf{C}$, *για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό α.*

Τότε $\mathbf{ON} \subseteq \mathbf{C}$.

Θεώρημα 4.60 *Έστω c ένα σύνολο και $\mathbf{F}_1 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$, $\mathbf{F}_2 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ δύο συναρτήσεις. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\mathbf{G} : \mathbf{ON} \longrightarrow \mathbf{V}$ τέτοια ώστε:*

(i) $\mathbf{G}(0) = c$.

(ii) $\mathbf{G}(\mathrm{Sc}(\alpha)) = \mathbf{F}_1(\mathbf{G}(\alpha))$ *για κάθε διατακτικό αριθμό α.*

(iii) $\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}_2(\mathbf{G}\restriction\alpha)$ *για κάθε οριακό δατακτικό αριθμό α.*

Απόδειξη Η μοναδικότητα είναι προφανής (με υπερπεπερασμένη επαγωγή). Για την ύπαρξη, πρώτα κατασκευάζουμε μια συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ χρησιμοποιώντας το c και τις $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$. Η τιμή $\mathbf{F}(x)$ της $\mathbf{F}$ σε ένα οποιοδήποτε $x \in \mathbf{V}$ ορίζεται ως εξής:

- Αν $x = \varnothing$, τότε
$$\mathbf{F}(x) := c.$$
- Αν x είναι μια συνάρτηση με $\mathrm{dom}(x) = \mathrm{Sc}(\alpha)$ για κάποιον διατακτικό αριθμό α, τότε
$$\mathbf{F}(x) := \mathbf{F}_1(x(\alpha)).$$
- Σε κάθε άλλη περίπτωση,
$$\mathbf{F}(x) := \mathbf{F}_2(x).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη αναδρομή, ορίζουμε τη συνάρτηση $\mathbf{G} : \mathbf{ON} \longrightarrow \mathbf{V}$ έτσι ώστε
$$\forall\alpha\,[\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{F}(\mathbf{G}{\restriction}\alpha)].$$
Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathbf{G}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. ∎

Η **πρόσθεση διατακτικών αριθμών** ορίζεται με υπερπεπερασμένη αναδρομή ως εξής:

- $\alpha + 0 := \alpha$.
- $\alpha + \mathrm{Sc}(\beta) := \mathrm{Sc}(\alpha + \beta)$ για κάθε διατακτικό αριθμό β.
- $\alpha + \beta := \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό β.

Είναι προφανές (με υπερπεπερασμένη επαγωγή) ότι για οποιουσδήποτε δύο διατακτικούς αριθμούς α και β, το άθροισμα $\alpha + \beta$ είναι διατακτικός αριθμός.

Θεώρημα 4.61 *Η πρόσθεση διατακτικών αριθμών έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $\alpha + 1 = \mathrm{Sc}(\alpha)$.

(ii) $0 + \alpha = \alpha$.

(iii) $\beta < \gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

(iv) $\beta \leq \gamma \Rightarrow \beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$.

(v) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$.

(vi) *Αν το β είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε και το άθροισμα $\alpha + \beta$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.*

(vii) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

(viii) $\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$ *και* $\alpha \cap \{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\} = \varnothing$.

(ix) *Αν* $m, n \in \omega$, *τότε* $m + n \in \omega$.

(x) *Αν* $m, n \in \omega$, *τότε* $m + n = n + m$.

Απόδειξη (i): Έχουμε

$$\alpha + 1 = \alpha + \mathrm{Sc}\,(0) = \mathrm{Sc}\,(\alpha + 0) = \mathrm{Sc}\,(\alpha)\,.$$

(ii): Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο α. Η αποδεικτέα ισότητα προφανώς ισχύει για το 0. Υποθέτοντας ότι ισχύει για το α, έχουμε

$$0 + \mathrm{Sc}\,(\alpha) = \mathrm{Sc}\,(0 + \alpha) = \mathrm{Sc}\,(\alpha)\,,$$

οπότε ισχύει και για το $\mathrm{Sc}\,(\alpha)$. Τέλος, στην περίπτωση που το α είναι οριακός διατακτικός αριθμός και η αποδεικτέα ισχύει για κάθε $\xi < \alpha$, έχουμε

$$0 + \alpha = \sup\{0 + \xi \mid \xi < \alpha\} = \sup\{\xi \mid \xi < \alpha\} = \sup \alpha = \alpha$$

και άρα η αποδεικτέα ισχύει και για το α.

(iii): Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma.$$

Αυτό γίνεται εύκολα με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ (κρατώντας τα α, β σταθερά).

(iv): Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο α. (Οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση.)

(v): Άμεση συνέπεια του (iii).

(vi): Έστω ότι το β είναι οριακός διατακτικός αριθμός. Επειδή $0 < \beta$, χρησιμοποιώντας το (iii) έχουμε

$$\alpha = \alpha + 0 < \alpha + \beta,$$

οπότε $\alpha + \beta \neq 0$. Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι $\alpha + \beta = \mathrm{Sc}\,(\gamma)$ για κάποιο γ. Τότε $\gamma < \alpha + \xi$ για κάποιο $\xi < \beta$, και άρα

$$\alpha + \beta = \mathrm{Sc}\,(\gamma) \leq \alpha + \xi < \alpha + \beta$$

που είναι άτοπο. Έτσι, το $\alpha+\beta$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός.

(vii): Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο γ. Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση όπου το γ είναι οριακός διατακτικός αριθμός και

$$\alpha+(\beta+\xi)=(\alpha+\beta)+\xi$$

για κάθε $\xi<\gamma$. Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε την ισοδυναμία

$$\delta<\alpha+(\beta+\gamma)\Leftrightarrow\delta<(\alpha+\beta)+\gamma.$$

Έστω λοιπον ότι $\delta<\alpha+(\beta+\gamma)$. Σύμφωνα με το (vi), το $\beta+\gamma$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, οπότε $\delta<\alpha+\eta$ για κάποιο $\eta<\beta+\gamma$. Τώρα, $\eta<\beta+\xi$ για κάποιο $\xi<\gamma$, επομένως

$$\delta<\alpha+\eta<\alpha+(\beta+\xi)=(\alpha+\beta)+\xi<(\alpha+\beta)+\gamma.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\delta<(\alpha+\beta)+\gamma$. Τότε $\delta<(\alpha+\beta)+\xi$ για κάποιο $\xi<\gamma$. Έτσι, αφού $\beta+\xi<\beta+\gamma$, έχουμε

$$\delta<(\alpha+\beta)+\xi=\alpha+(\beta+\xi)<\alpha+(\beta+\gamma)\,.$$

(viii): Αν $\eta<\alpha$, τότε

$$\eta<\alpha=\alpha+0\leq\alpha+\xi$$

για οποιοδήποτε ξ, και άρα

$$\alpha\cap\{\alpha+\xi\mid\xi<\beta\}=\varnothing.$$

Για την ισότητα

$$\alpha+\beta=\alpha\cup\{\alpha+\xi\mid\xi<\beta\}$$

θα χρησιμοποιήσουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή στο β. Η ισότητα προφανώς ισχύει για το 0. Υποθέτοντας ότι ισχύει για το β, έχουμε

$$\begin{gathered}\alpha+\mathrm{Sc}\,(\beta)=\mathrm{Sc}\,(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)\cup\{\alpha+\beta\}\\=\alpha\cup\{\alpha+\xi\mid\xi<\beta\}\cup\{\alpha+\beta\}=\alpha\cup\{\alpha+\xi\mid\xi\leq\beta\}\\=\alpha\cup\{\alpha+\xi\mid\xi<\mathrm{Sc}\,(\beta)\}\,,\end{gathered}$$

οπότε ισχύει και για το $\mathrm{Sc}\,(\beta)$. Τέλος, έστω ότι το β είναι οριακός διατακτικός αριθμός και

$$\alpha+\gamma=\alpha\cup\{\alpha+\eta\mid\eta<\gamma\}$$

για κάθε $\gamma < \beta$. Αν $\delta < \alpha + \beta$, τότε για κάποιο $\gamma < \beta$ έχουμε

$$\delta < \alpha + \gamma = \alpha \cup \{\alpha + \eta \mid \eta < \gamma\} \subseteq \alpha \cup \{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$$

και άρα $\delta \in \alpha \cup \{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι

$$\alpha + \beta \subseteq \alpha \cup \{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}.$$

Αντίστροφα, έχουμε

$$\alpha = \alpha + 0 \leq \alpha + \beta$$

και

$$\alpha + \xi < \mathrm{Sc}(\alpha + \xi) = \alpha + \mathrm{Sc}(\xi) < \alpha + \beta$$

για κάθε $\xi < \beta$, οπότε

$$\alpha \cup \{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\} \subseteq \alpha + \beta.$$

(ix): Με επαγωγή στο n.

(x): Με επαγωγή στο n, αφού πρώτα δείξουμε (πάλι με επαγωγή) ότι $k + 1 = 1 + k$ για κάθε $k \in \omega$. ■

Από εδώ και πέρα αντί για $\mathrm{Sc}(\alpha)$ θα γράφουμε

$$\alpha + 1.$$

Παρατήρηση 4.62

(i) Δεν ισχύει γενικά ότι $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. Π.χ. $1 + \omega = \omega < \omega + 1$.

(ii) Δεν ισχύει γενικά ότι $\beta < \gamma \Rightarrow \beta + \alpha < \gamma + \alpha$. Π.χ. $1 < 2$, αλλά $1 + \omega = 2 + \omega$.

(iii) Δεν ισχύει γενικά ότι $\beta + \alpha = \gamma + \alpha \Rightarrow \beta = \gamma$.

(iv) Η πρόσθεση διατακτικών αριθμών συμφωνεί πάνω στο ω με τη συνήθη πρόσθεση φυσικών αριθμών.

Θεώρημα 4.63 *Έστω $\langle A, <_A \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle$ δύο καλώς διατεταγμένα σύνολα τέτοια ώστε $A \cap B = \varnothing$. Ορίζουμε πάνω στο σύνολο $A \cup B$ μια διμελή σχέση $<$ θέτοντας, για κάθε $x, y \in A \cup B$,*

$$\begin{aligned} x < y \;:\Leftrightarrow\; & (x \in A \wedge y \in B) \vee (x, y \in A \wedge x <_A y) \\ & \vee (x, y \in B \wedge x <_B y). \end{aligned}$$

Τότε η $<$ είναι μια καλή διάταξη του $A \cup B$ και

$$\mathrm{ord}(A \cup B) = \mathrm{ord}(A) + \mathrm{ord}(B).$$

Απόδειξη Το ότι η $<$ είναι καλή διάταξη του $A \cup B$ αφήνεται ως άσκηση. Ας θεωρήσουμε τώρα ισομορφισμούς $f : A \longrightarrow \mathrm{ord}\,(A)$ και $g : B \longrightarrow \mathrm{ord}\,(B)$. Ορίζουμε μια συνάρτηση h από το $A \cup B$ στο

$$\mathrm{ord}\,(A) + \mathrm{ord}\,(B) = \mathrm{ord}\,(A) \cup \{\mathrm{ord}\,(A) + \xi \mid \xi < \mathrm{ord}\,(B)\}$$

θέτοντας

$$h\,(z) = \begin{cases} f\,(z) & \text{αν } z \in A, \\ \mathrm{ord}\,(A) + g\,(z) & \text{αν } z \in B. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η h είναι ισομορφισμός μεταξύ των $\langle A \cup B, < \rangle$ και $\mathrm{ord}\,(A) + \mathrm{ord}\,(B)$. ■

Έστω α και β δύο οποιοιδήποτε διατακτικοί αριθμοί. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, το άθροισμα $\alpha + \beta$ είναι ο διατακτικός τύπος του καλώς διατεταγμένου συνόλου που παράγεται τοποθετώντας ένα αντίγραφο του β μετά το τέλος του α:

$$\underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\alpha} \quad \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{\beta}$$

Ο **πολλαπλασιασμός διατακτικών αριθμών** (που είναι μια διμελής πράξη πάνω στην κλάση $\mathbf{ON}$) ορίζεται ως εξής:

- $\alpha \cdot 0 := 0$.
- $\alpha \cdot (\beta + 1) := \alpha \cdot \beta + \alpha$ για κάθε διατακτικό αριθμό β.[2]
- $\alpha \cdot \beta := \sup \{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta\}$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό β.

Για οποιουσδήποτε δύο διατακτικούς αριθμούς α και β, το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ γράφεται και ως $\alpha\beta$.

Θεώρημα 4.64 *Ο πολλαπλασιασμός διατακτικών αριθμών έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $0 \cdot \alpha = 0$.

(ii) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$.

(iii) *Αν* $\alpha > 0$, *τότε* $\beta < \gamma \Leftrightarrow \alpha\beta < \alpha\gamma$.

(iv) $\beta \leq \gamma \Rightarrow \beta\alpha \leq \gamma\alpha$.

[2] Φυσικά, $\alpha \cdot \beta + \alpha$ σημαίνει $(\alpha \cdot \beta) + \alpha$.

(v) $\alpha\beta = \alpha\gamma \wedge \alpha > 0 \;\Rightarrow\; \beta = \gamma$.

(vi) *Αν* $\alpha > 0$ *και το* β *είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε το γινόμενο* $\alpha\beta$ *είναι οριακός διατακτικός αριθμός.*

(vii) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

(viii) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

(ix) $\alpha\beta = \{\alpha\xi + \eta \mid \xi < \beta \wedge \eta < \alpha\}$.

(x) *Αν* $m, n \in \omega$, *τότε* $mn \in \omega$.

(xi) *Αν* $m, n \in \omega$, *τότε* $mn = nm$.

Παρατήρηση 4.65

(i) Δεν ισχύει γενικά ότι $\alpha\beta = \beta\alpha$. Π.χ. $2 \cdot \omega = \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2$.

(ii) Δεν ισχύει γενικά ότι $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$. Π.χ. $(1 + 1) \cdot \omega = \omega < \omega + \omega = 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$.

(iii) Δεν ισχύει γενικά ότι $\beta < \gamma \wedge \alpha > 0 \;\Rightarrow\; \beta\alpha < \gamma\alpha$. Π.χ. $1 < 2$ και $\omega > 0$, αλλά $1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$.

(iv) Δεν ισχύει γενικά ότι $\beta\alpha = \gamma\alpha \wedge \alpha > 0 \;\Rightarrow\; \beta = \gamma$.

(v) Ο πολλαπλασιασμός διατακτικών αριθμών συμφωνεί πάνω στο ω με τον συνήθη πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών.

Θεώρημα 4.66 *Έστω* A *και* B *δύο καλώς διατεταγμένα σύνολα. Τότε*

$$\operatorname{ord}(B \times A) = \operatorname{ord}(A) \cdot \operatorname{ord}(B),$$

όπου το $B \times A$ *είναι εφοδιασμένο με τη* ***λεξικογραφική διάταξη****:*

$$\langle b_1, a_1 \rangle < \langle b_2, a_2 \rangle \;:\Leftrightarrow\; b_1 < b_2 \vee (b_1 = b_2 \wedge a_1 < a_2).$$

Απόδειξη Είναι εύκολο να δούμε ότι το $B \times A$ είναι καλώς διατεταγμένο με τη λεξικογραφική διάταξη. Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε ισομορφισμούς $f : A \longrightarrow \operatorname{ord}(A)$ και $g : B \longrightarrow \operatorname{ord}(B)$. Ορίζουμε μια συνάρτηση h από το $B \times A$ στο

$$\operatorname{ord}(A) \cdot \operatorname{ord}(B) = \{\operatorname{ord}(A) \cdot \xi + \eta \mid \xi < \operatorname{ord}(B) \wedge \eta < \operatorname{ord}(A)\}$$

θέτοντας
$$h\,(b,a) = \mathrm{ord}\,(A)\cdot g\,(b) + f\,(a)\,.$$
Θα δείξουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα ισομορφισμός μεταξύ των $B\times A$ και $\mathrm{ord}\,(A)\cdot\mathrm{ord}\,(B)$. Έστω $\langle b_1,a_1\rangle$ και $\langle b_2,a_2\rangle$ δύο στοιχεία του $B\times A$ με $\langle b_1,a_1\rangle < \langle b_2,a_2\rangle$. Αν $b_1<b_2$, τότε

$$\begin{aligned} h\,(b_1,a_1) &= \mathrm{ord}\,(A)\cdot g\,(b_1) + f\,(a_1) < \mathrm{ord}\,(A)\cdot g\,(b_1) + \mathrm{ord}\,(A)\\ &= \mathrm{ord}\,(A)\cdot[g\,(b_1)+1] \le \mathrm{ord}\,(A)\cdot g\,(b_2)\\ &\le \mathrm{ord}\,(A)\cdot g\,(b_2) + f\,(a_2) = h\,(b_2,a_2)\,. \end{aligned}$$

Αν $b_1=b_2$ και $a_1<a_2$, τότε

$$\begin{aligned} h\,(b_1,a_1) &= h\,(b_2,a_1) = \mathrm{ord}\,(A)\cdot g\,(b_2) + f\,(a_1)\\ &< \mathrm{ord}\,(A)\cdot g\,(b_2) + f\,(a_2) = h\,(b_2,a_2)\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς η h είναι όντως γνησίως αύξουσα. ■

Έστω $\alpha,\beta\in\mathbf{ON}$. Σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα, το γινόμενο $\alpha\beta$ είναι ο διατακτικός τύπος του καλώς διατεταγμένου συνόλου που προκύπτει όταν κάθε στοιχείου του β αντικατασταθεί με ένα αντίγραφο του α:

$$\underset{\beta}{\underline{\underset{\alpha}{\underline{\cdots\cdots}}\quad\underset{\alpha}{\underline{\cdots\cdots}}\quad\underset{\alpha}{\underline{\cdots\cdots}}\quad\cdots\cdots\cdots}}$$

Χρησιμοποιώντας λίγο πιο ασαφή γλώσσα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το $\alpha\beta$ ισούται με β αντίγραφα του α.

Ορίζουμε τώρα **δυνάμεις διατακτικών αριθμών**:

- $\alpha^0 := 1$.
- $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta\cdot\alpha$ για κάθε διατακτικό αριθμό β.
- $\alpha^\beta := \sup\left\{\alpha^\xi \mid 0<\xi<\beta\right\}$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό β.

Θεώρημα 4.67 *Οι δυνάμεις διατακτικών αριθμών έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\alpha^1=\alpha$.

(ii) $\beta>0\Rightarrow 0^\beta=0$.

(iii) $1^\beta=1$.

(iv) $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha^\beta > 0$.

(v) *Αν* $\alpha > 1$, *τότε* $\beta < \gamma \Leftrightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

(vi) $\beta \leq \gamma \Rightarrow \beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$.

(vii) *Αν* $\alpha > 0$ *και το* β *είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε*

$$\alpha^\beta = \sup \left\{ \alpha^\xi \mid \xi < \beta \right\}.$$

(viii) *Αν* $\alpha > 1$ *και το* β *είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε το* α^β *είναι οριακός διατακτικός αριθμός.*

(ix) $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$.

(x) $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

(xi) *Αν* $m, n \in \omega$, *τότε* $m^n \in \omega$.

(xii) *Αν* $m, n, k \in \omega$, *τότε* $(mn)^k = m^k n^k$.

Παρατήρηση 4.68

(i) Δεν ισχύει γενικά ότι $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma \beta^\gamma$. Π.χ. έχουμε $(\omega \cdot 2)^2 = \omega^2 \cdot 2 < \omega^2 \cdot 2^2$.

(ii) Οι δυνάμεις διατακτικών αριθμών συμφωνούν πάνω στο ω με τις συνήθεις δυνάμεις φυσικών αριθμών.

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$. Αν $f : \beta \longrightarrow \alpha$, τότε το σύνολο

$$\operatorname{supp}(f) := \{\xi < \beta \mid f(\xi) \neq 0\}$$

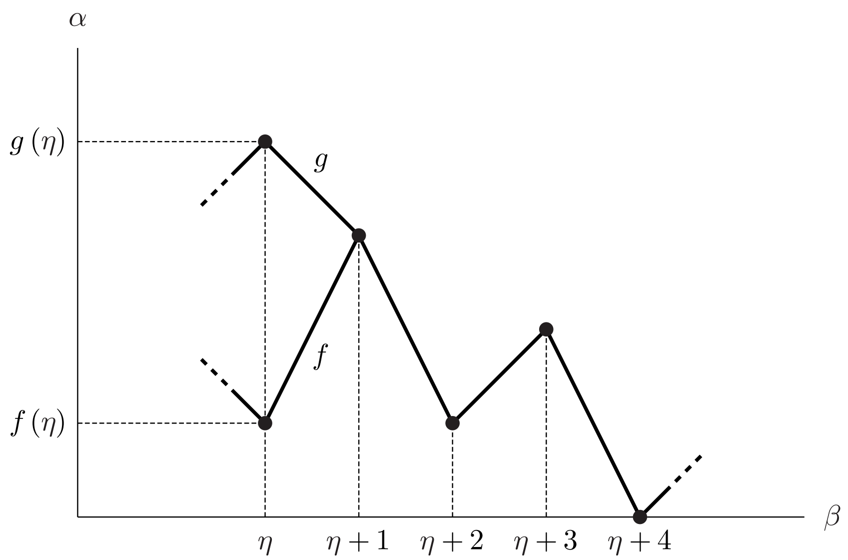
λέγεται **φορέας** της f. (Ο συμβολισμός προέρχεται από τη λέξη support.) Το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \beta \longrightarrow \alpha$ με πεπερασμένο φορέα θα συμβολίζεται με

$$E(\beta, \alpha).$$

Ορίζουμε πάνω στο $E(\beta, \alpha)$ μια διμελή σχέση $\lhd$ θέτοντας, για οποιεσδήποτε $f, g \in E(\beta, \alpha)$,

$$f \lhd g :\Leftrightarrow (\exists \eta < \beta) \left[f(\eta) < g(\eta) \wedge (\forall \xi < \beta) (\xi > \eta \Rightarrow f(\xi) = g(\xi)) \right].$$

Η παρακάτω εικόνα, που δείχνει δύο συναρτήσεις $f, g \in E(\beta, \alpha)$ με $f \lhd g$, μας βοηθάει να οπτικοποιήσουμε τη σχέση $\lhd$:



Αν $f \in E(\beta, \alpha)$ και η f δεν είναι η μηδενική συνάρτηση (με τιμή 0 πάνω σε όλο το β), τότε το **μέτωπο** μ_f της f είναι το μεγαλύτερο $\xi < \beta$ τέτοιο ώστε $f(\xi) \neq 0$, δηλαδή

$$\mu_f := \max \operatorname{supp}(f).$$

Θεώρημα 4.69 *Η σχέση $\lhd$ είναι μια καλή διάταξη του $E(\beta, \alpha)$.*

Απόδειξη Είναι προφανές ότι η $\lhd$ είναι μερική διάταξη του $E(\beta, \alpha)$. Για να δούμε ότι η $\lhd$ είναι καλή διάταξη θα χρησιμοποιήσουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή στο β. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι για κάθε $\xi < \beta$, το σύνολο $E(\xi, \alpha)$ είναι καλώς διατεταγμένο με την αντίστοιχη $\lhd$. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο $X \subseteq E(\beta, \alpha)$ με σκοπό να δείξουμε ότι το X έχει ένα ($\lhd$-) ελάχιστο στοιχείο. Αν η μηδενική συνάρτηση ανήκει στο X, τότε η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς το ελάχιστο στοιχείο του X. Στην αντίθετη περίπτωση, θέτουμε

$$\gamma := \min \{\mu_f \mid f \in X\},$$

$$\delta := \min \{f(\gamma) \mid f \in X \wedge \mu_f = \gamma\}$$

και

$$Y := \{f \restriction \gamma \mid f \in X \wedge \mu_f = \gamma \wedge f(\gamma) = \delta\}.$$

Το Y είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $E(\gamma, \alpha)$, άρα έχει ένα ελάχιστο στοιχείο h (σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση). Η συνάρτηση

$$h \cup \{\langle \gamma, \delta \rangle\} \cup \{\langle \xi, 0 \rangle \mid \gamma < \xi < \beta\}$$

είναι προφανώς το ελάχιστο στοιχείο του X. ■

Λήμμα 4.70 *Έστω* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{ON}$ *με* $\alpha > 1$ *και* $\gamma < \beta$. *Τότε*

$$E(\gamma, \alpha) \cong (E(\beta, \alpha))_t,$$

όπου η συνάρτηση $t \in E(\beta, \alpha)$ *ορίζεται από την ισότητα*

$$t(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \xi = \gamma, \\ 0 & \text{αν } \xi \neq \gamma. \end{cases}$$

Απόδειξη Αν για κάθε $h \in E(\gamma, \alpha)$ θέσουμε

$$\widehat{h} := h \cup \{\langle \xi, 0 \rangle \mid \gamma \leq \xi < \beta\},$$

τότε είναι προφανές ότι ο κανόνας $h \mapsto \widehat{h}$ ορίζει έναν ισομορφισμό από το $E(\gamma, \alpha)$ στο $(E(\beta, \alpha))_t$. ■

Θεώρημα 4.71 *Για κάθε* $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$, *έχουμε*

$$\operatorname{ord}(E(\beta, \alpha)) = \alpha^\beta.$$

Απόδειξη Θα χρησιμοποιήσουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή στο β. Επειδή $E(0, \alpha) = \{\varnothing\}$, έχουμε

$$\operatorname{ord}(E(0, \alpha)) = 1 = \alpha^0,$$

δηλαδή η αποδεικτέα ισότητα ισχύει για το 0. Υποθέτοντας ότι ισχύει για το β, θεωρούμε τη συνάρτηση $G : E(\beta + 1, \alpha) \longrightarrow \alpha \times E(\beta, \alpha)$ με τύπο

$$G(f) = \langle f(\beta), f{\restriction}\beta \rangle.$$

Η G προφανώς είναι ισομορφισμός μεταξύ των $E(\beta + 1, \alpha)$ και $\alpha \times E(\beta, \alpha)$, όπου το σύνολο $\alpha \times E(\beta, \alpha)$ είναι εφοδιασμένο με τη λεξικογραφική διάταξη. Επομένως

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(E(\beta + 1, \alpha)) &= \operatorname{ord}(\alpha \times E(\beta, \alpha)) \\ = \operatorname{ord}(E(\beta, \alpha)) \cdot \operatorname{ord}(\alpha) &= \alpha^\beta \cdot \alpha = \alpha^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, έστω ότι το β είναι οριακός διατακτικός αριθμός και

$$\operatorname{ord}(E(\xi, \alpha)) = \alpha^\xi$$

για κάθε $\xi < \beta$ (επαγωγική υπόθεση). Επειδή

$$\operatorname{ord}(E(\beta, 0)) = 0 = 0^\beta$$

και

$$\operatorname{ord}(E(\beta,1)) = 1 = 1^{\beta},$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha > 1$. Για να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\operatorname{ord}(E(\beta,\alpha)) \leq \alpha^{\beta},$$

ας θεωρήσουμε ένα $\eta < \operatorname{ord}(E(\beta,\alpha))$. Τότε

$$\eta \cong (E(\beta,\alpha))_f$$

για κάποια $f \in E(\beta,\alpha)$. Διαλέγουμε ένα $\gamma < \beta$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$ για κάθε ξ με $\gamma \leq \xi < \beta$, και έστω $t \in E(\beta,\alpha)$ η συνάρτηση με

$$t(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \xi = \gamma, \\ 0 & \text{αν } \xi \neq \gamma. \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα και την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned} \eta = \operatorname{ord}\left((E(\beta,\alpha))_f\right) &\leq \operatorname{ord}((E(\beta,\alpha))_t) \\ &= \operatorname{ord}(E(\gamma,\alpha)) = \alpha^{\gamma} < \alpha^{\beta}. \end{aligned}$$

Τέλος, για να αποδείξουμε την ανισότητα

$$\alpha^{\beta} \leq \operatorname{ord}(E(\beta,\alpha)),$$

έστω ότι $\eta < \alpha^{\beta}$, δηλαδή $\eta < \alpha^{\gamma}$ για κάποιο $\gamma < \beta$. Αν η t οριστεί όπως παραπάνω, τότε (χρησιμοποιώντας ξανά την επαγωγική υπόθεση και το προηγούμενο λήμμα) έχουμε

$$\eta < \alpha^{\gamma} = \operatorname{ord}(E(\gamma,\alpha)) = \operatorname{ord}((E(\beta,\alpha))_t) \leq \operatorname{ord}(E(\beta,\alpha)).$$

Έτσι,

$$\operatorname{ord}(E(\beta,\alpha)) = \alpha^{\beta}$$

και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. ■

Θεώρημα 4.72 *Έστω A, B πεπερασμένα σύνολα και m, n φυσικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $A \approx m$ και $B \approx n$. Τότε:*

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cup B \approx m + n$.

(ii) $A \times B \approx mn$.

(iii) ${}^{A}B \approx n^m$.

Απόδειξη Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι τα A, B είναι καλώς διατεταγμένα σύνολα με $\operatorname{ord}(A) = m$ και $\operatorname{ord}(B) = n$.

(i): Έστω ότι $A \cap B = \varnothing$. Τότε το $A \cup B$ μπορεί να εφοδιαστεί με μια καλή διάταξη έτσι ώστε

$$\operatorname{ord}(A \cup B) = \operatorname{ord}(A) + \operatorname{ord}(B) = m + n,$$

και άρα $A \cup B \approx m + n$.

(ii): Εφοδιάζοντας το $A \times B$ με τη λεξικογραφική διάταξη, έχουμε

$$\operatorname{ord}(A \times B) = \operatorname{ord}(B) \cdot \operatorname{ord}(A) = nm = mn$$

και άρα $A \times B \approx mn$.

(iii): Αν $p : m \longrightarrow A$ και $q : B \longrightarrow n$ είναι αμφιρρίψεις, τότε ο κανόνας

$$f \mapsto q \circ f \circ p$$

ορίζει μια αμφίρριψη από το ${}^{A}B$ στο ${}^{m}n$. Επομένως

$${}^{A}B \approx {}^{m}n = E(m, n) \approx n^m.$$

■

Θεώρημα 4.73 *Η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο σύνολο.*

Απόδειξη Έστω A και B δύο πεπερασμένα σύνολα. Το σύνολο $B - A$ είναι πεπερασμένο και

$$A \cup B = A \cup (B - A), \quad A \cap (B - A) = \varnothing.$$

Διαλέγοντας τα $m, n \in \omega$ έτσι ώστε $A \approx m$ και $B - A \approx n$, έχουμε

$$A \cup B = A \cup (B - A) \approx m + n$$

και άρα το σύνολο $A \cup B$ είναι πεπερασμένο. ■

Θεώρημα 4.74 *Η ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο σύνολο.*

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.73 και επαγωγή στο $n \in \omega$, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια συνόλων τέτοια ώστε $\mathcal{F} \approx n$ και κάθε στοιχείο της $\mathcal{F}$ είναι πεπερασμένο, τότε το σύνολο $\bigcup \mathcal{F}$ είναι πεπερασμένο. ■

4.5 Η συσσωρευτική ιεραρχία

Τα σύνολα V_α (όπου $\alpha \in \mathbf{ON}$) ορίζονται με υπερπεπερασμένη αναδρομή ως εξής:

- $V_0 := \varnothing$.
- $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$ για κάθε διατακτικό αριθμό α.
- $V_\alpha := \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό α.

Τα V_α αποτελούν τη λεγόμενη **συσσωρευτική ιεραρχία συνόλων**. Επίσης, θέτουμε

$$\mathbf{WF} := \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} V_\alpha.$$

Τα στοιχεία της κλάσης $\mathbf{WF}$ λέγονται **καλώς θεμελιωμένα σύνολα** (well-founded sets).

Θεώρημα 4.75 *Έστω $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$. Τότε:*

(i) *Το V_α είναι μεταβατικό σύνολο.*

(ii) $V_\alpha \notin V_\alpha$.

(iii) $\alpha < \beta \Leftrightarrow V_\alpha \in V_\beta \Leftrightarrow V_\alpha \subset V_\beta$.

(iv) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$.

(v) $V_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{P}(V_\xi)$.

Άσκηση 4.76 Δείξτε ότι η $\mathbf{WF}$ είναι μεταβατική κλάση.

Αν $x \in \mathbf{WF}$, τότε ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός α τέτοιος ώστε $x \in V_{\alpha+1}$ λέγεται **βαθμός** του x και συμβολίζεται με

$$\operatorname{rank}(x).$$

Θεώρημα 4.77 *Έχουμε:*

(i) $\forall\alpha\,[V_\alpha = \{x \in \mathbf{WF} \mid \operatorname{rank}(x) < \alpha\}]$.

(ii) $(\forall x, y \in \mathbf{WF})\,[x \in y \Rightarrow \operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)]$.

(iii) $(\forall y \in \mathbf{WF})\,[\operatorname{rank}(y) = \sup\{\operatorname{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}]$.

(iv) $\forall\alpha\,(\alpha \in V_{\alpha+1} - V_\alpha)$.

(v) $\forall\alpha\,[\alpha \in \mathbf{WF} \wedge \operatorname{rank}(\alpha) = \alpha]$.

(vi) $\forall\alpha\,(V_\alpha \cap \mathbf{ON} = \alpha)$.

(vii) $\forall x\,(x \in \mathbf{WF} \Leftrightarrow x \subseteq \mathbf{WF})$.

Απόδειξη (i): Αν $x \in V_\alpha$, τότε για κάποιο $\xi < \alpha$ έχουμε $x \in \mathcal{P}(V_\xi) = V_{\xi+1}$ και άρα $\operatorname{rank}(x) \leq \xi < \alpha$. Αντίστροφα, αν $x \in \mathbf{WF}$ και $\operatorname{rank}(x) = \beta < \alpha$, τότε $x \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$.

(ii): Έστω ότι $x, y \in \mathbf{WF}$ και $x \in y$. Θέτοντας $\alpha = \operatorname{rank}(y)$, έχουμε $y \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, δηλαδή $y \subseteq V_\alpha$. Έτσι, $x \in V_\alpha$ και άρα, χρησιμοποιώντας το (i), $\operatorname{rank}(x) < \alpha = \operatorname{rank}(y)$.

(iii): Έστω $y \in \mathbf{WF}$. Θέτοντας $\alpha = \operatorname{rank}(y)$, πρέπει να αποδείξουμε την ισότητα

$$\alpha = \sup\{\operatorname{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}.$$

Έστω $\beta < \alpha$. Τότε $y \notin V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta)$ και άρα υπάρχει ένα $z \in y$ τέτοιο ώστε $z \notin V_\beta$. Έτσι, σύμφωνα με το (i), $\operatorname{rank}(z) \not< \beta$ και κατά συνέπεια

$$\beta \leq \operatorname{rank}(z) < \operatorname{rank}(z) + 1 \leq \sup\{\operatorname{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}.$$

Αντίστροφα, χρησιμοποιώντας το (ii) έχουμε

$$x \in y \Rightarrow \operatorname{rank}(x) < \alpha \Rightarrow \operatorname{rank}(x) + 1 \leq \alpha,$$

οπότε

$$\sup\{\operatorname{rank}(x) + 1 \mid x \in y\} \leq \alpha.$$

(iv): Με υπερπεπερασμένη επαγωγή.

(v), (vi): Άσκηση.

(vii): Η συνεπαγωγή $x \in \mathbf{WF} \Rightarrow x \subseteq \mathbf{WF}$ είναι απλά η μεταβατικότητα της $\mathbf{WF}$. Αντίστροφα, έστω ότι $x \subseteq \mathbf{WF}$. Τότε, θέτοντας

$$\alpha = \sup\{\operatorname{rank}(y) + 1 \mid y \in x\},$$

έχουμε $x \in V_{\alpha+1}$ και άρα $x \in \mathbf{WF}$. ■

Έστω A ένα οποιοδήποτε σύνολο. Τότε το σύνολο

$$\operatorname{TC}(A) := A \cup \left(\bigcup A\right) \cup \left(\bigcup\bigcup A\right) \cup \left(\bigcup\bigcup\bigcup A\right) \cup \cdots$$

λέγεται **μεταβατικό περίβλημα** (transitive closure) του A. Ένας πιο αυστηρός ορισμός του $\mathrm{TC}(A)$ είναι:

$$\mathrm{TC}(A) := \bigcup \{X_n \mid n \in \omega\},$$

όπου

$$X_0 := A, \quad X_{n+1} := \bigcup X_n.$$

Θεώρημα 4.78 *Το $\mathrm{TC}(A)$ είναι το ελάχιστο μεταβατικό υπερσύνολο του A. Δηλαδή:*

(i) Το $\mathrm{TC}(A)$ είναι μεταβατικό σύνολο και $A \subseteq \mathrm{TC}(A)$.

(ii) Αν B είναι ένα μεταβατικό σύνολο τέτοιο ώστε $A \subseteq B$, τότε $\mathrm{TC}(A) \subseteq B$.

Αξίωμα 4.79 (αξίωμα κανονικότητας) *Κάθε μη κενό σύνολο x περιέχει ένα στοιχείο το οποίο είναι ξένο προς το x. Συμβολικά:*

$$\forall x\,[x \neq \varnothing \Rightarrow (\exists y \in x)\,(y \cap x = \varnothing)].$$

Θεώρημα 4.80 *Έχουμε:*

(i) Δεν υπάρχει σύνολο x τέτοιο ώστε $x \in x$.

(ii) Δεν υπάρχουν σύνολα $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 2$, τέτοια ώστε

$$x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1.$$

Απόδειξη (i): Έστω x ένα σύνολο τέτοιο ώστε $x \in x$. Τότε $x \in x \cap \{x\}$ και άρα το $\{x\}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο ξένο προς το $\{x\}$. Αυτό όμως αντιβαίνει στο αξίωμα κανονικότητας.

(ii): Αν $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1$, τότε το $A := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο ξένο προς το A, και έτσι έχουμε πάλι άτοπο. ∎

Άσκηση 4.81 Δείξτε ότι η Sc είναι $1-1$.

Άσκηση 4.82 Δείξτε ότι αν X, Y είναι δύο τυχαία σύνολα και $Z = Y \times \{X\}$, τότε $Z \approx Y$ και $Z \cap X = \varnothing$.

Το επόμενο θεώρημα είναι μια γενίκευση του αξιώματος κανονικότητας.

Θεώρημα 4.83 *Έστω* $\mathbf{A}$ *μια μη κενή κλάση. Τότε υπάρχει ένα* $x \in \mathbf{A}$ *τέτοιο ώστε* $x \cap \mathbf{A} = \varnothing$.

Απόδειξη Έστω b ένα οποιοδήποτε στοιχείο της $\mathbf{A}$. Αν $b \cap \mathbf{A} = \varnothing$ έχουμε τελειώσει, γι' αυτό θα υποθέσουμε ότι $b \cap \mathbf{A} \neq \varnothing$. Τότε $\mathrm{TC}(b) \cap \mathbf{A} \neq \varnothing$ και άρα, σύμφωνα με το αξίωμα κανονικότητας, υπάρχει ένα $x \in \mathrm{TC}(b) \cap \mathbf{A}$ τέτοιο ώστε

$$x \cap \mathrm{TC}(b) \cap \mathbf{A} = \varnothing.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$x \cap \mathrm{TC}(b) \cap \mathbf{A} = x \cap \mathbf{A}.$$

Έτσι, $x \cap \mathbf{A} = \varnothing$ και η απόδειξη είναι πλήρης. ∎

Αν $\mathbf{A}$ είναι μια μη κενή κλάση, τότε ένα $x \in \mathbf{A}$ τέτοιο ώστε $x \cap \mathbf{A} = \varnothing$ λέγεται **$\in$-ελαχιστικό στοιχείο** της $\mathbf{A}$.

Θεώρημα 4.84 ($\in$-επαγωγή) *Έστω* $\mathbf{C}$ *μια κλάση τέτοια ώστε*

$$\forall x \left(x \subseteq \mathbf{C} \Rightarrow x \in \mathbf{C} \right).$$

Τότε $\mathbf{C} = \mathbf{V}$.

Απόδειξη Έστω ότι $\mathbf{C} \neq \mathbf{V}$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.83, η κλάση $\mathbf{V} - \mathbf{C}$ έχει ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο x. Είναι προφανές ότι $x \subseteq \mathbf{C}$. Έτσι, $x \in \mathbf{C}$ το οποίο είναι άτοπο. ∎

Παρατήρηση 4.85 Η $\in$-επαγωγή συνδέεται στενά με την **$\in$-αναδρομή** η οποία μας επιτρέπει να ορίσουμε μια συνάρτηση $\mathbf{G} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ καθορίζοντας το $\mathbf{G}(x)$ μέσω της (ήδη ορισθείσας) $\mathbf{G} \upharpoonright x$. Η $\in$-αναδρομή δεν θα χρειαστεί παρακάτω, γι' αυτό παραλείπουμε τις σχετικές λεπτομέρειες.

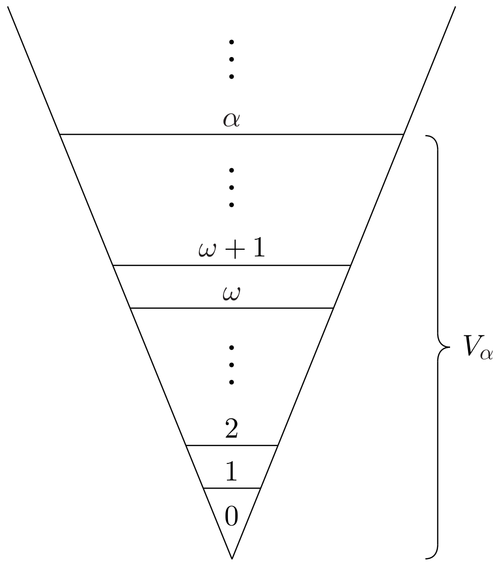
Θεώρημα 4.86 *Το αξίωμα κανονικότητας είναι ισοδύναμο με την ισότητα* $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$.

Απόδειξη Αν ισχύει το αξίωμα κανονικότητας, τότε $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$ με $\in$-επαγωγή. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$. Αν $x \neq \varnothing$ και διαλέξουμε ένα $y \in x$ με ελάχιστο βαθμό, τότε $y \cap x = \varnothing$. ∎

Η ισότητα

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} V_\alpha,$$

που όπως είδαμε είναι ισοδύναμη με το αξιώμα κανονικότητας, σημαίνει ότι κάθε σύνολο ανήκει σε κάποιο V_α της συσσωρευτικής ιεραρχίας. Έτσι, έχουμε την ακόλουθη εικόνα του σύμπαντος των συνόλων:



Θεώρημα 4.87 (αρχή της συλλογής) *Έστω ότι*

$$(\forall x \in A)\, \exists y \varphi \left(x, y, A, \overrightarrow{p} \right),$$

όπου A είναι ένα σύνολο και $\varphi \left(x, y, A, \overrightarrow{p} \right)$ είναι ένας τύπος. Τότε υπάρχει ένα σύνολο B τέτοιο ώστε

$$(\forall x \in A)\, (\exists y \in B)\, \varphi \left(x, y, A, \overrightarrow{p} \right).$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in A$, έστω

$$\alpha_x := \min \left\{ \xi \mid \exists y \left[\varphi \left(x, y, A, \overrightarrow{p} \right) \wedge \operatorname{rank}(y) = \xi \right] \right\}.$$

Θέτοντας

$$\beta := \sup \left\{ \alpha_x + 1 \mid x \in A \right\},$$

έχουμε

$$(\forall x \in A)\, (\exists y \in V_\beta)\, \varphi \left(x, y, A, \overrightarrow{p} \right)$$

και άρα μπορούμε να πάρουμε $B = V_\beta$. ∎

Παρατήρηση 4.88 Η αρχή της συλλογής είναι μια γενίκευση του αξιώματος αντικατάστασης.

Θεώρημα 4.89 *Για κάθε σύνολο A οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Το A είναι διατακτικός αριθμός.*

(ii) *Το A είναι μεταβατικό σύνολο και κάθε στοιχείο του A είναι μεταβατικό σύνολο.*

(iii) *Το A είναι μεταβατικό σύνολο και $(\forall x, y \in A)\,(x \in y \vee x = y \vee y \in x)$.*

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii): Προφανές.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (ii) αλλά υπάρχουν στοιχεία $x, y \in A$ τέτοια ώστε
$$x \notin y \wedge x \neq y \wedge y \notin x.$$
Έστω x_0 ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο του συνόλου
$$\{x \in A \mid (\exists y \in A)\,(x \notin y \wedge x \neq y \wedge y \notin x)\},$$
και έστω y_0 ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο του συνόλου
$$\{y \in A \mid x_0 \notin y \wedge x_0 \neq y \wedge y \notin x_0\}.$$
Έτσι, τα x_0, y_0 είναι μεταβατικά σύνολα με
$$x_0 \notin y_0 \wedge x_0 \neq y_0 \wedge y_0 \notin x_0.$$
Επειδή $x_0 \neq y_0$, υπάρχει ένα z τέτοιο ώστε
$$z \in x_0 - y_0 \vee z \in y_0 - x_0.$$
Αν $z \in x_0 - y_0$, τότε
$$z \notin y_0 \wedge z \neq y_0 \wedge y_0 \notin z$$
το οποίο αντιβαίνει στην $\in$-ελαχιστικότητα του x_0. Αν $z \in y_0 - x_0$, τότε
$$x_0 \notin z \wedge x_0 \neq z \wedge z \notin x_0$$
το οποίο αντιβαίνει στην $\in$-ελαχιστικότητα του y_0. Έτσι, και στις δύο περιπτώσεις έχουμε άτοπο.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Άσκηση. ∎

Μέχρι τώρα έχουμε υιοθετήσει τα ακόλουθα αξιώματα:

(i) Αξίωμα ύπαρξης.

(ii) Αξίωμα έκτασης.

(iii) Αξίωμα διαχωρισμού.

(iv) Αξίωμα ζεύγους.

(v) Αξίωμα ένωσης.

(vi) Αξίωμα δυναμοσυνόλου.

(vii) Αξίωμα αντικατάστασης.

(viii) Αξίωμα απειρότητας.

(ix) Αξίωμα κανονικότητας.

Η θεωρία συνόλων που βασίζεται στα αξιώματα αυτά είναι γνωστή ως **θεωρία Zermelo-Fraenkel** ή (για συντομία) ZF.

4.6 Το αξίωμα επιλογής

Θα χρειαστούμε μερικούς ορισμούς:

- Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε κάθε συνάρτηση h τέτοια ώστε $\mathrm{dom}(h) = \mathcal{F}$ και $(\forall X \in \mathcal{F})\,[h(X) \in X]$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** για την $\mathcal{F}$.

- Αν $\langle P, \leq \rangle$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, τότε κάθε υποσύνολο C του P το οποίο είναι ολικώς διατεταγμένο από τη σχέση $\leq$ λέγεται **αλυσίδα** του P.

- Αν $\langle P, \leq \rangle$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο τέτοιο ώστε κάθε αλυσίδα του P έχει ένα άνω φράγμα (μέσα στο P), τότε το $\langle P, \leq \rangle$ λέγεται **επαγωγικώς διατεταγμένο σύνολο**.

- Μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{F}$ έχει **πεπερασμένο χαρακτήρα** αν $\mathcal{F} \neq \varnothing$ και, για κάθε σύνολο X, το X ανήκει στην $\mathcal{F}$ αν και μόνον αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X ανήκει στην $\mathcal{F}$.

Θεώρημα 4.90 *Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) ***Αξίωμα επιλογής***

Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε η $\mathcal{F}$ έχει μια συνάρτηση επιλογής.

(ii) *Αν $\{A_i \mid i \in I\}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$ είναι μη κενό.*

(iii) *Αν $\mathcal{F}$ είναι μια ξένη οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε υπάρχει ένα σύνολο M το οποίο έχει ακριβώς ένα κοινό στοιχείο με κάθε μέλος της $\mathcal{F}$ (δηλαδή για κάθε $X \in \mathcal{F}$, το $M \cap X$ είναι μονοσύνολο).*

(iv) ***Αρχή της καλής διάταξης***

Κάθε σύνολο μπορεί να εφοδιαστεί με μια καλή διάταξη.

(v) *Για κάθε σύνολο A υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός α τέτοιος ώστε $A \approx \alpha$.*

(vi) ***Λήμμα του Zorn***

Αν $\langle P, \leq \rangle$ είναι ένα επαγωγικώς διατεταγμένο σύνολο, τότε το P έχει ένα μεγιστικό στοιχείο.

(vii) ***Ισχυρή μορφή του λήμματος Zorn***

Αν $\langle P, \leq \rangle$ είναι ένα επαγωγικώς διατεταγμένο σύνολο, τότε για κάθε $p \in P$ υπάρχει ένα $q \in P$ τέτοιο ώστε $p \leq q$ και το q είναι μεγιστικό στοιχείο του P.

(viii) ***Μεγιστική αρχή του Hausdorff***

Αν $\langle P, \leq \rangle$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, τότε κάθε αλυσίδα του P περιέχεται σε μια $\subseteq$-μεγιστική αλυσίδα του P.

(ix) ***Λήμμα Teichmüller-Tukey***

Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια με πεπερασμένο χαρακτήρα, τότε η $\mathcal{F}$ έχει ένα $\subseteq$-μεγιστικό στοιχείο.

(x) ***Ισχυρή μορφή του λήμματος Teichmüller-Tukey***

Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια με πεπερασμένο χαρακτήρα, τότε για κάθε $A \in \mathcal{F}$ υπάρχει ένα $B \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και το B είναι $\subseteq$-μεγιστικό στοιχείο της $\mathcal{F}$.

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω $\{A_i \mid i \in I\}$ μια οικογένεια μη κενών συνόλων. Αν h είναι μια συνάρτηση επιλογής για την εν λόγω οικογένεια, τότε η συνάρτηση
$$i \mapsto h(A_i)$$
προφανώς ανήκει στο καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I} A_i$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Έστω $\mathcal{F}$ μια ξένη οικογένεια μη κενών συνόλων. Είναι σαφές ότι η $\mathcal{F}$ μπορεί να γραφεί ως
$$\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\},$$
όπου $A_i \cap A_j = \varnothing$ για $i \neq j$. Αν $g \in \prod_{i\in I} A_i$, τότε προφανώς
$$\operatorname{ran}(g) \cap A_i = \{g(i)\}$$
για κάθε $i \in I$, και έτσι το σύνολο $\operatorname{ran}(g)$ έχει ακριβώς ένα κοινό στοιχείο με κάθε μέλος της $\mathcal{F}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια μη κενών συνόλων. Τότε η
$$\mathcal{G} := \{A \times \{A\} \mid A \in \mathcal{F}\}$$
είναι μια ξένη οικογένεια μη κενών συνόλων. Έστω M ένα σύνολο το οποίο έχει ακριβώς ένα κοινό στοιχείο με κάθε μέλος της $\mathcal{G}$. Αν για κάθε $A \in \mathcal{F}$ ορίσουμε
$$\begin{aligned} h(A) :=\ & \text{η πρώτη συντεταγμένη του κοινού στοιχείου} \\ & \langle x, A\rangle \text{ των συνόλων } M \text{ και } A \times \{A\}, \end{aligned}$$
τότε η h είναι μια συνάρτηση επιλογής για την $\mathcal{F}$.

(i) $\Rightarrow$ (iv): Έστω A ένα τυχαίο σύνολο. Ο στόχος μας είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας καλής διάταξης πάνω στο A. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \neq \varnothing$. Έστω h μια συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $\mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}$, και έστω c ένα οποιοδήποτε στοιχείο του A. Χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη αναδρομή, ορίζουμε μια συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbf{ON} \longrightarrow A$ ως εξής:
$$\mathbf{F}(\alpha) := \begin{cases} h(A - \{\mathbf{F}(\xi) \mid \xi < \alpha\}) & \text{αν } A - \{\mathbf{F}(\xi) \mid \xi < \alpha\} \neq \varnothing, \\ \\ c & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$
Παρατηρούμε ότι η $\mathbf{F}$ είναι επιρριπτική, διότι στην αντίθετη περίπτωση η $\mathbf{F}$ θα ήταν $1-1$ και κατά συνέπεια (χρησιμοποιώντας το αξίωμα αντικατάστασης) η κλάση $\mathbf{ON}$ θα ήταν σύνολο. Αν τώρα ορίσουμε την $g : A \longrightarrow \mathbf{ON}$ θέτοντας
$$g(x) := \text{το ελάχιστο } \alpha \in \mathbf{ON} \text{ τέτοιο ώστε } \mathbf{F}(\alpha) = x,$$

τότε η g είναι μια αμφίρριψη από το A στο $\operatorname{ran}(g)$. Έτσι, η καλή διάταξη του $\operatorname{ran}(g)$ μπορεί να μεταφερθεί (μέσω της g) στο A.

(iv) $\Rightarrow$ (v): Έστω A ένα οποιοδήποτε σύνολο. Εφοδιάζοντας το A με μια καλή διάταξη, έχουμε $A \approx \operatorname{ord}(A)$.

(v) $\Rightarrow$ (vi): Έστω $\langle P, \leq \rangle$ ένα επαγωγικώς διατεταγμένο σύνολο και $f : \alpha \longrightarrow P$ μια αμφίρριψη (όπου $\alpha \in \mathbf{ON}$). Ορίζουμε μια συνάρτηση $g : \alpha \longrightarrow P$ με υπερπεπερασμένη αναδρομή ως εξής. Έστω ότι $\beta < \alpha$ και για κάθε $\xi < \beta$ έχουμε ήδη ορίσει το $g(\xi)$. Αν υπάρχει $\gamma < \alpha$ που να ικανοποιεί

$$(\forall \xi < \beta)\,[g(\xi) \leq f(\gamma)] \wedge f(\gamma) \not< f(\beta)\,,$$

τότε θέτουμε

$$g(\beta) := f(\gamma_0)\,,$$

όπου γ_0 είναι το ελάχιστο τέτοιο γ. Διαφορετικά θέτουμε

$$g(\beta) := f(0)\,.$$

Χρησιμοποιώντας υπερπεπερασμένη επαγωγή και την επαγωγικότητα της διάταξης του P, είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $\beta < \alpha$ ισχύει

$$(\forall \xi < \beta)\,[g(\xi) \leq g(\beta)] \wedge g(\beta) \not< f(\beta)\,.$$

[Με άλλα λόγια, στον ορισμό της g η δεύτερη περίπτωση $g(\beta) := f(0)$ τελικά δεν εμφανίζεται ποτέ.] Αν $u \in P$ είναι ένα οποιοδήποτε άνω φράγμα της αλυσίδας $\operatorname{ran}(g)$, τότε προφανώς το u είναι μεγιστικό στοιχείο του P.

(vi) $\Rightarrow$ (vii): Έστω $\langle P, \leq \rangle$ ένα επαγωγικώς διατεταγμένο σύνολο και $p \in P$. Τότε το

$$Q := \{x \in P \mid p \leq x\}$$

είναι επαγωγικώς διατεταγμένο. Αν q είναι ένα μεγιστικό στοιχείο του Q, τότε $p \leq q$ και το q είναι μεγιστικό στοιχείο του P.

(vii) $\Rightarrow$ (viii): Έστω $\langle P, \leq \rangle$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των αλυσίδων του P. Αρκεί να δείξουμε ότι το $\langle \mathcal{F}, \subseteq_{\mathcal{F}} \rangle$ είναι επαγωγικώς διατεταγμένο. Έστω λοιπόν $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ μια αλυσίδα του $\langle \mathcal{F}, \subseteq_{\mathcal{F}} \rangle$. Τότε το σύνολο $\bigcup \mathcal{C}$ είναι ένα άνω φράγμα της $\mathcal{C}$ μέσα στο $\langle \mathcal{F}, \subseteq_{\mathcal{F}} \rangle$.

(viii) $\Rightarrow$ (x): Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια με πεπερασμένο χαρακτήρα και $A \in \mathcal{F}$. Το $\{A\}$ είναι αλυσίδα του μερικώς διατεταγμένου συνόλου $\langle \mathcal{F}, \subseteq_{\mathcal{F}} \rangle$. Έστω $\mathcal{C}$ μια $\subseteq$-μεγιστική αλυσίδα του $\langle \mathcal{F}, \subseteq_{\mathcal{F}} \rangle$ τέτοια ώστε $\{A\} \subseteq \mathcal{C}$. Θέτοντας

$$B := \bigcup \mathcal{C},$$

έχουμε $A \subseteq B$ και $B \in \mathcal{F}$ (λόγω του πεπερασμένου χαρακτήρα της $\mathcal{F}$). Επιπλέον, η $\subseteq$-μεγιστικότητα της $\mathcal{C}$ συνεπάγεται ότι το B είναι $\subseteq$-μεγιστικό στοιχείο της $\mathcal{F}$.

(x) $\Rightarrow$ (ix): Προφανές.

(ix) $\Rightarrow$ (i): Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια μη κενών συνόλων. Θέτοντας

$$\mathcal{G} := \{g \mid g \text{ είναι συνάρτηση επιλογής για κάποια υποοικογένεια της } \mathcal{F}\},$$

παρατηρούμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι μια οικογένεια με πεπερασμένο χαρακτήρα. Αν η h είναι ένα $\subseteq$-μεγιστικό στοιχείο της $\mathcal{G}$, τότε προφανώς $\operatorname{dom}(h) = \mathcal{F}$ και άρα η h είναι συνάρτηση επιλογής για την $\mathcal{F}$. ■

Στα αξιώματα της θεωρίας ZF προσθέτουμε τώρα και το ακόλουθο:

Αξίωμα 4.91 (αξίωμα επιλογής) *Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια μη κενών συνόλων, τότε η $\mathcal{F}$ έχει μια συνάρτηση επιλογής.*

Η θεωρία που προκύπτει από τη ZF με την προσθήκη του αξιώματος επιλογής συμβολίζεται με ZFC. (Το γράμμα C είναι από τη λέξη choice.) Όταν λέμε "θεωρία συνόλων" εννοούμε συνήθως τη θεωρία ZFC (στην οποία δεν χρειάζεται να προσθέσουμε κανένα άλλο αξίωμα).

Θεώρημα 4.92 (αρχή των εξαρτημένων επιλογών) *Έστω R μια διμελής σχέση πάνω σε ένα σύνολο A τέτοια ώστε*

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x\, R\, y),$$

και έστω $a_0 \in A$. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f : \omega \longrightarrow A$ τέτοια ώστε $f(0) = a_0$ και

$$(\forall n \in \omega)[f(n)\ R\, f(n+1)].$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in A$, θέτουμε

$$x^* := \{y \in A \mid x\, R\, y\}.$$

Έστω h μια συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $\{x^* \mid x \in A\}$. Ορίζουμε την $f : \omega \longrightarrow A$ αναδρομικά ως εξής:

$$f(0) := a_0$$

και

$$f(n+1) := h(f(n)^*)$$

για κάθε $n \in \omega$. Είναι προφανές ότι η f έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. ■

Ένα σύνολο A λέγεται **άπειρο κατά Dedekind** αν το A είναι ισοπληθές με ένα γνήσιο υποσύνολό του (δηλαδή $A \approx B$ για κάποιο $B \subset A$). Το θεώρημα που ακολουθεί δεν εξαρτάται από το αξίωμα επιλογής.

Θεώρημα 4.93 *Ένα σύνολο A είναι άπειρο κατά Dedekind αν και μόνον αν το A έχει ένα απειραριθμήσιμο[3] υποσύνολο.*

Απόδειξη Έστω ότι το A είναι άπειρο κατά Dedekind, δηλαδή υπάρχει μια ένριψη $f : A \longrightarrow A$ τέτοια ώστε $\mathrm{ran}\,(f) \subset A$. Διαλέγουμε ένα $a_0 \in A - \mathrm{ran}\,(f)$ και ορίζουμε την $g : \omega \longrightarrow A$ αναδρομικά θέτοντας

$$g\,(0) := a_0, \quad g\,(n+1) := f\,(g\,(n))\,.$$

Χρησιμοποιώντας επαγωγή βλέπουμε εύκολα ότι για κάθε $n \in \omega$ ισχύει

$$(\forall k < n)\,[g\,(n) \neq g\,(k)]\,.$$

Επομένως η g είναι $1-1$ και το $\mathrm{ran}\,(g)$ είναι ένα απειραριθμήσιμο υποσύνολο του A.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει μια ένριψη $g : \omega \longrightarrow A$. Αν ορίσουμε την $f : A \longrightarrow A$ θέτοντας

$$f\,(g\,(n)) := g\,(n+1)$$

για κάθε $n \in \omega$ και

$$f\,(x) := x$$

για κάθε $x \in A - \mathrm{ran}\,(g)$, τότε η f είναι $1-1$ και $g\,(0) \in A - \mathrm{ran}\,(f)$. ■

Το επόμενο θεώρημα εξαρτάται από το αξίωμα επιλογής.

Θεώρημα 4.94 *Ένα σύνολο A είναι άπειρο κατά Dedekind αν και μόνον αν το A είναι άπειρο.*

Απόδειξη Έστω ότι το A είναι άπειρο κατά Dedekind. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.93, $\omega \precsim A$. Αν $A \approx n$ για κάποιο $n \in \omega$, τότε $\omega \precsim n$ το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως το A είναι άπειρο.

Αντίστροφα, έστω ότι το A είναι άπειρο. Επικαλούμενοι πάλι το Θεώρημα 4.93, αρκεί να δείξουμε ότι το A έχει ένα απειραριθμήσιμο υποσύνολο (πρβλ. Άσκηση 1.109). Χάρη στην αρχή της καλής διάταξης, μπορούμε να υποθέσουμε

[3] Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο X λέγεται απειραριθμήσιμο αν $X \approx \omega$.

ότι το A είναι εφοδιασμένο με μια καλή διάταξη. Αν ορίσουμε την $f : \omega \longrightarrow A$ θέτοντας

$$f(n) := \min(A - \{f(k) \mid k < n\})$$

για κάθε $n \in \omega$, τότε η f είναι $1-1$ και άρα το $\operatorname{ran}(f)$ είναι ένα απειραριθμήσιμο υποσύνολο του A. ■

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια τυπική εφαρμογή του λήμματος Zorn.

Θεώρημα 4.95 (Krull) *Έστω R ένας δακτύλιος και U ένα γνήσιο ιδεώδες του R. Τότε το U περιέχεται σε ένα μεγιστικό ιδεώδες του R. (Συνεπώς κάθε μη τετριμμένος δακτύλιος έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό ιδεώδες.)*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{I}$ το σύνολο όλων των γνήσιων ιδεωδών του R (οπότε $U \in \mathcal{I}$). Το $\langle \mathcal{I}, \subseteq_{\mathcal{I}} \rangle$ είναι ένα επαγωγικώς διατεταγμένο σύνολο διότι για κάθε μη κενή αλυσίδα $\mathcal{C}$ του $\mathcal{I}$ έχουμε $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{I}$. Έτσι, δυνάμει (της ισχυρής μορφής) του αξιώματος Zorn, υπάρχει ένα $V \in \mathcal{I}$ τέτοιο ώστε $U \subseteq V$ και το V είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{I}$. ■

Το αξίωμα επιλογής μας επιτρέπει να αποδείξουμε και κάποια αποτελέσματα που εκ πρώτης όψεως φαίνονται παράδοξα. Το πιο γνωστό από αυτά είναι το **θεώρημα Banach-Tarski**: μια (συμπαγής) μπάλα μπορεί να χωριστεί σε πέντε κομμάτια τα οποία με κατάλληλη επανασυναρμολόγηση σχηματίζουν δύο πιστά αντίγραφα της αρχικής μπάλας. Πώς δικαιολογείται αυτός ο ταχυδακτυλουργικός διπλασιασμός του όγκου της μπάλας; Η απάντηση βρίσκεται στο γεγονός ότι τα πέντε κομμάτια δεν έχουν όγκο διότι είναι "χαοτικά νέφη" σημείων και όχι στερεά συμπαγή σώματα. Μια δραστικά απλουστευμένη εκδοχή του θεωρήματος Banach-Tarski είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα (το οποίο κατ' ουσίαν οφείλεται στον T. Tao):

Θεώρημα 4.96 *Υπάρχει τρόπος να διαλέξουμε ένα υποσύνολο S του διαστήματος $[0,1]$, να χωρίσουμε το S σε ένα αριθμήσιμο πλήθος κομματιών τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, και στη συνέχεια να μετατοπίσουμε τα κομμάτια αυτά έτσι ώστε να καλυφθεί όλη η πραγματική ευθεία.*

Απόδειξη Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε η **μετατόπιση** του A κατά c είναι το σύνολο

$$A + c := \{x + c \mid x \in A\}.$$

Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ πάνω στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ θέτοντας

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Έτσι, το $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ διασπάται σε κλάσεις ισοδυναμίας. Το αξίωμα επιλογής εγγυάται την ύπαρξη ενός συνόλου $X \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν q και q' είναι δύο διαφορετικοί ρητοί αριθμοί, τότε οι αντίστοιχες μετατοπίσεις $X + q$ και $X + q'$ του X είναι δύο ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Τα σύνολα $X + q$ με $q \in \mathbb{Q} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ είναι τα κομμάτια από τα οποία αποτελείται το ζητούμενο υποσύνολο S του $[0, 1]$, δηλαδή θέτουμε

$$S := \bigcup \left\{X + q \mid q \in \mathbb{Q} \cap \left[0, \tfrac{1}{2}\right]\right\}.$$

Στη συνέχεια, έστω

$$f : \mathbb{Q} \cap \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{Q}$$

μια αμφίρριψη. Για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$, το $X + f(q)$ είναι προφανώς μια μετατόπιση του $X+q$ [για την ακρίβεια, η μετατόπιση του $X+q$ κατά $f(q) - q$]. Ισχυριζόμαστε ότι τα σύνολα $X + f(q)$ με $q \in \mathbb{Q} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$ καλύπτουν όλη την πραγματική ευθεία, δηλαδή

$$\mathbb{R} = \bigcup \left\{X + f(q) \mid q \in \mathbb{Q} \cap \left[0, \tfrac{1}{2}\right]\right\}.$$

Για να το δούμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι $y \in \mathbb{R}$ και ας διαλέξουμε ένα $r \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$y - \frac{1}{2} \leq r \leq y.$$

Επειδή $y - r \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, έχουμε $y - r \sim x$ για κάποιο $x \in X$. Αυτό συνεπάγεται ότι $y - x \in \mathbb{Q}$, οπότε $y - x = f(q)$ για κάποιο $q \in \mathbb{Q} \cap \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Έτσι,

$$y = x + f(q) \in X + f(q)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. ∎

Παρατήρηση 4.97 Χρησιμοποιώντας τεχνικές που είναι έξω από τα περιθώρια του παρόντος βιβλίου, μπορούμε να δείξουμε ότι το αξίωμα επιλογής είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Πιο συγκεκριμένα, αν η θεωρία ZF είναι συνεπής (δηλαδή απαλλαγμένη από αντιφάσεις), τότε ούτε το αξίωμα επιλογής ούτε η άρνησή του είναι θεωρήματα της ZF.

4.7 Πληθάριθμοι

Ένας διατακτικός αριθμός α λέγεται **πληθάριθμος** ή **πληθικός αριθμός** αν δεν υπάρχει διατακτικός αριθμός β τέτοιος ώστε $\beta < \alpha$ και $\alpha \approx \beta$. Οι μεταβλητές κ, λ, μ θα συμβολίζουν πληθαρίθμους.

Παράδειγμα 4.98 Κάθε διατακτικός αριθμός $\leq \omega$ είναι πληθάριθμος.

Έστω A ένα οποιοδήποτε σύνολο. Σύμφωνα με μία από τις ισοδύναμες μορφές του αξιώματος επιλογής, υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός α τέτοιος ώστε $A \approx \alpha$. Ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός με την ιδιότητα αυτή είναι ένας πληθάριθμος ο οποίος λέγεται **πληθάριθμος του συνόλου** A και συμβολίζεται με

$$|A|.$$

Θεώρημα 4.99 *Για κάθε διατακτικό αριθμό α έχουμε*

$$|\alpha| \leq \alpha,$$

με ισότητα αν και μόνον αν ο α είναι πληθάριθμος.

Θεώρημα 4.100 *Για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B ισχύουν τα εξής:*

(i) $A \approx B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

(ii) $A \precsim B \Leftrightarrow |A| \leq |B|$.

(iii) $A \prec B \Leftrightarrow |A| < |B|$.

Άσκηση 4.101 Έστω A, B δύο σύνολα με $A \neq \varnothing$. Δείξτε ότι $|A| \leq |B|$ αν και μόνον αν υπάρχει επίρριψη $g : B \longrightarrow A$.

Θεώρημα 4.102 *Για κάθε σύνολο A ισχύουν τα εξής:*

(i) Το A είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $|A| < \omega$.

(ii) Το A είναι απειραριθμήσιμο αν και μόνον αν $|A| = \omega$.

(iii) Το A είναι αριθμήσιμο αν και μόνον αν $|A| \leq \omega$.

Λήμμα 4.103 *Έστω α ένας διατακτικός αριθμός $\geq \omega$. Τότε $\alpha \approx \alpha + 1$.*

Απόδειξη Ορίζουμε μια συνάρτηση $f : \alpha + 1 \longrightarrow \alpha$ ως εξής:

- $f(n) := n + 1$ για κάθε $n < \omega$.
- $f(\xi) := \xi$ για κάθε ξ τέτοιο ώστε $\omega \leq \xi < \alpha$.
- $f(\alpha) := 0$.

Η f προφανώς είναι αμφιρριπτική, άρα $\alpha \approx \alpha + 1$. ■

Θεώρημα 4.104 *Κάθε άπειρος πληθάριθμος είναι οριακός διατακτικός αριθμός.*

Απόδειξη Με το προηγούμενο λήμμα. ■

Θεώρημα 4.105 *Έστω X ένα σύνολο πληθαρίθμων. Τότε το $\sup X$ είναι πληθάριθμος.*

Απόδειξη Θέτοντας
$$\alpha := \sup X = \bigcup X,$$
έστω ότι $\alpha \approx \beta$ για κάποιο $\beta < \alpha$. Ας διαλέξουμε ένα $\kappa \in X$ τέτοιο ώστε $\beta < \kappa$. Επειδή $\kappa \leq \alpha$ και $\alpha \approx \beta$, έχουμε $\kappa \precsim \beta$. Επίσης, επειδή $\beta < \kappa$, έχουμε $\beta \precsim \kappa$. Το θεώρημα Schröder-Bernstein συνεπάγεται τώρα ότι $\kappa \approx \beta$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το κ είναι πληθάριθμος. ■

Για κάθε σύνολο A, θέτουμε
$$\mathcal{H}(A) := \{\xi \mid \xi \precsim A\}.$$

Θεώρημα 4.106 *Η κλάση $\mathcal{H}(A)$ είναι πληθάριθμος.*

Απόδειξη Έχουμε
$$\mathcal{H}(A) = \left\{\operatorname{ord}\langle X, R\rangle \mid X \subseteq A \wedge R \subseteq X^2 \wedge R \text{ είναι καλή διάταξη του } X\right\},$$
οπότε η $\mathcal{H}(A)$ είναι σύνολο σύμφωνα με το αξίωμα αντικατάστασης. Επειδή η $\mathcal{H}(A)$ προφανώς είναι και μεταβατική, συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{H}(A)$ είναι διατακτικός αριθμός. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{H}(A) \approx \xi$ για κάποιο $\xi \in \mathcal{H}(A)$. Τότε $\mathcal{H}(A) \precsim A$ και άρα $\mathcal{H}(A) \in \mathcal{H}(A)$. Αυτό όμως είναι άτοπο. Έτσι, η $\mathcal{H}(A)$ είναι πληθάριθμος. ■

Ο πληθάριθμος $\mathcal{H}(A)$ λέγεται **αριθμός Hartogs** του συνόλου A.

Άσκηση 4.107 Δείξτε ότι $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}(|A|)$ για κάθε σύνολο A.

Αν $\alpha \in \mathbf{ON}$, τότε αντί για $\mathcal{H}(\alpha)$ θα γράφουμε α^+, δηλαδή
$$\alpha^+ := \mathcal{H}(\alpha).$$

Θεώρημα 4.108 *Έστω $\alpha \in \mathbf{ON}$. Τότε:*

(i) α^+ *είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος* $> \alpha$.

(ii) $\alpha^+ = |\alpha|^+$.

Έστω κ ένας πληθάριθμος. Αν $\kappa = \lambda^+$ για κάποιον πληθάριθμο λ, τότε ο κ λέγεται **διάδοχος πληθάριθμος**. Αν ο κ δεν είναι διάδοχος πληθάριθμος και επιπλέον $\kappa > \omega$, τότε ο κ λέγεται **οριακός πληθάριθμος**.

Οι **πληθάριθμοι άλεφ** ορίζονται ως εξής:

- $\aleph_0 := \omega$.
- $\aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+$ για κάθε διατακτικό αριθμό α.
- $\aleph_\alpha := \sup\{\aleph_\xi \mid \xi < \alpha\}$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό α.

Μερικές φορές αντί για $\aleph_\alpha$ γράφουμε ω_α.

Θεώρημα 4.109 *Έστω* $\alpha, \beta \in \mathbf{ON}$. *Έχουμε:*

(i) *Ο* $\aleph_\alpha$ *είναι άπειρος πληθάριθμος.*

(ii) $\alpha \leq \aleph_\alpha$.

(iii) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

(iv) *Αν* κ *είναι ένας άπειρος πληθάριθμος, τότε* $\kappa = \aleph_\xi$ *για κάποιο* ξ.

(v) *Ο* $\aleph_\alpha$ *είναι διάδοχος πληθάριθμος αν και μόνον αν ο* α *είναι διάδοχος διατακτικός αριθμός.*

(vi) *Ο* $\aleph_\alpha$ *είναι οριακός πληθάριθμος αν και μόνον αν ο* α *είναι οριακός διατακτικός αριθμός.*

Απόδειξη Θα αποδείξουμε μόνο το (iv), αφήνοντας τα υπόλοιπα μέρη ως άσκηση. Έστω λοιπόν κ ένας άπειρος πληθάριθμος και έστω γ ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός τέτοιος ώστε $\kappa < \aleph_\gamma$. Είναι προφανές ότι $\gamma = \xi + 1$ για κάποιο ξ. Έτσι,

$$\aleph_\xi \leq \kappa < \aleph_\xi^+$$

και κατά συνέπεια $\kappa = \aleph_\xi$. ■

Το **άθροισμα** $\kappa \oplus \lambda$ και το **γινόμενο** $\kappa \otimes \lambda$ δύο πληθαρίθμων κ και λ ορίζονται από τις ισότητες

$$\kappa \oplus \lambda := |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|,$$

$$\kappa \otimes \lambda := |\kappa \times \lambda|.$$

Θεώρημα 4.110 *Έστω A, B δύο σύνολα. Έχουμε:*

(i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow |A \cup B| = |A| \oplus |B|$.

(ii) $|A \times B| = |A| \otimes |B|$.

Απόδειξη (i): Ας υποθέσουμε ότι $A \cap B = \varnothing$. Επειδή

$$A \approx |A| \approx |A| \times \{0\}$$

και

$$B \approx |B| \approx |B| \times \{1\},$$

είναι προφανές ότι

$$A \cup B \approx (|A| \times \{0\}) \cup (|B| \times \{1\}).$$

Επομένως

$$|A \cup B| = |(|A| \times \{0\}) \cup (|B| \times \{1\})| = |A| \oplus |B|.$$

(ii): Έχουμε

$$A \times B \approx |A| \times |B|$$

και άρα

$$|A \times B| = ||A| \times |B|| = |A| \otimes |B|.$$

■

Θεώρημα 4.111 *Έστω κ, λ, μ πληθάριθμοι. Έχουμε:*

(i) $\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$.

(ii) $\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$.

(iii) $\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$.

(iv) $\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu$.

(v) $\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \oplus (\kappa \otimes \mu)$.

Θεώρημα 4.112 *Έστω κ, λ δύο τυχαίοι πληθάριθμοι και έστω m, n δύο φυσικοί αριθμοί. Έχουμε:*

(i) $\kappa \oplus \lambda = |\kappa + \lambda|$.

(ii) $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \cdot \lambda|$.

(iii) $m \oplus n = m + n$.

(iv) $m \otimes n = m \cdot n$.

(Όπου + και · είναι οι συνήθεις πράξεις μεταξύ διατακτικών αριθμών.)

Απόδειξη (i): Το σύνολο $(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})$ μπορεί να εφοδιαστεί με μια καλή διάταξη έτσι ώστε

$$\mathrm{ord}\left((\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})\right) = \kappa + \lambda.$$

Συνεπώς

$$\kappa \oplus \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})| = |\kappa + \lambda|\,.$$

(ii): Εφοδιάζοντας το σύνολο $\lambda \times \kappa$ με τη λεξικογραφική διάταξη, έχουμε

$$\mathrm{ord}\,(\lambda \times \kappa) = \kappa \cdot \lambda$$

και άρα

$$\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa = |\lambda \times \kappa| = |\kappa \cdot \lambda|\,.$$

(iii), (iv): Προφανή, χάρη στα (i) και (ii). ∎

Ορίζουμε μια καλή διάταξη $\lhd$ της κλάσης $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}$ ως εξής:

$$\begin{gathered}\langle \alpha, \beta \rangle \lhd \langle \gamma, \delta \rangle :\Leftrightarrow \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \\ \vee \left[\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge (\alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta < \delta))\right].\end{gathered}$$

Η $\lhd$ λέγεται **κανονική διάταξη** της $\mathbf{ON} \times \mathbf{ON}$.

Λήμμα 4.113 *Για κάθε άπειρο πληθάριθμο κ έχουμε*

$$\mathrm{ord}\,(\kappa \times \kappa) = \kappa,$$

όπου το σύνολο $\kappa \times \kappa$ είναι εφοδιασμένο με την κανονική διάταξη $\lhd$.

Απόδειξη Έστω ότι το λήμμα δεν ισχύει, και έστω λ ο ελάχιστος άπειρος πληθάριθμος τέτοιος ώστε $\mathrm{ord}\,(\lambda \times \lambda) \neq \lambda$. Έτσι, αφού

$$\lambda \leq |\lambda \times \lambda| = |\mathrm{ord}\,(\lambda \times \lambda)| \leq \mathrm{ord}\,(\lambda \times \lambda)\,,$$

έχουμε
$$\lambda < \mathrm{ord}\,(\lambda \times \lambda)\,.$$
Είναι σαφές ότι μπορούμε να διαλέξουμε ένα $\langle \alpha, \beta \rangle \in \lambda \times \lambda$ τέτοιο ώστε το σύνολο
$$W := (\lambda \times \lambda)_{\langle \alpha, \beta \rangle} = \{\langle \xi, \eta \rangle \in \lambda \times \lambda \mid \langle \xi, \eta \rangle \lhd \langle \alpha, \beta \rangle\}$$
να έχει διατακτικό τύπο λ. Θέτοντας
$$\gamma := \max\{\alpha, \beta\} + 1,$$
έχουμε $\gamma < \lambda$ (αφού ο λ είναι οριακός διατακτικός αριθμός) και $W \subseteq \gamma \times \gamma$. Επομένως
$$\lambda = |W| \leq |\gamma \times \gamma| = |\gamma| \otimes |\gamma| = ||\gamma| \times |\gamma||\,.$$
Αλλά $\mathrm{ord}\,(|\gamma| \times |\gamma|) = |\gamma|$ (λόγω της ελαχιστότητας του λ) και άρα
$$||\gamma| \times |\gamma|| = |\gamma|\,.$$
Έχουμε λοιπόν
$$\lambda \leq ||\gamma| \times |\gamma|| = |\gamma| \leq \gamma < \lambda,$$
το οποίο είναι άτοπο, και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Θεώρημα 4.114 *Έστω κ ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε:*

(i) $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.

(ii) $\kappa \oplus \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ *για κάθε πληθάριθμο* λ.

(iii) $\kappa \otimes \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$ *για κάθε πληθάριθμο* $\lambda \neq 0$.

Απόδειξη (i): Με το προηγούμενο λήμμα.

(ii): Έστω λ ένας οποιοσδήποτε πληθάριθμος. Θα δείξουμε ότι $\kappa \oplus \lambda = \mu$, όπου
$$\mu := \max\{\kappa, \lambda\}\,.$$
Επειδή
$$\kappa = |\kappa \times \{0\}| \leq |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})| = \kappa \oplus \lambda$$
και
$$\lambda = |\lambda \times \{1\}| \leq |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})| = \kappa \oplus \lambda,$$
έχουμε
$$\mu \leq \kappa \oplus \lambda.$$

Επίσης, επειδή

$$(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\}) \subseteq \mu \times \mu,$$

έχουμε

$$\kappa \oplus \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})| \leq |\mu \times \mu| = \mu \otimes \mu = \mu.$$

(iii): Άσκηση. ■

Θεώρημα 4.115 *Έστω κ ένας άπειρος πληθάριθμος. Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια συνόλων τέτοια ώστε $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ και $|A| \leq \kappa$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$, τότε*

$$\left|\bigcup \mathcal{F}\right| \leq \kappa.$$

Απόδειξη Υποθέτοντας ότι $\mathcal{F} \neq \varnothing$, μπορούμε να γράψουμε την $\mathcal{F}$ ως

$$\mathcal{F} = \{A_\xi \mid \xi < \kappa\}.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας το αξίωμα επιλογής, διαλέγουμε για κάθε $\xi < \kappa$ μια ένριψη $g_\xi : A_\xi \longrightarrow \kappa$. Ορίζουμε τώρα μια συνάρτηση $h : \bigcup \mathcal{F} \longrightarrow \kappa \times \kappa$ ως εξής:

$$h(x) := \langle g_\xi(x), \xi \rangle,$$

όπου ξ είναι ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός $< \kappa$ τέτοιος ώστε $x \in A_\xi$. Η h προφανώς είναι $1-1$, άρα

$$\left|\bigcup \mathcal{F}\right| \leq |\kappa \times \kappa| = \kappa \otimes \kappa = \kappa.$$

■

Θεώρημα 4.116 *Έστω A ένα άπειρο σύνολο. Τότε:*

(i) $|A^n| = |A|$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}^+$.

(ii) $\left|{}^B A\right| = |A|$ *για κάθε πεπερασμένο μη κενό σύνολο* B.

(iii) $\left|\bigcup_{n \in \omega} {}^n A\right| = |A|$.

(iv) $|\{X \subseteq A : X \text{ είναι πεπερασμένο}\}| = |A|$.

Απόδειξη (i): Με επαγωγή στο n. Έχουμε $A^1 = A$ και άρα

$$\left|A^1\right| = |A|.$$

Έστω τώρα ότι $|A^n| = |A|$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}^+$. Επειδή $A^{n+1} = A^n \times A$, έχουμε

$$\left|A^{n+1}\right| = |A^n \times A| = |A^n| \otimes |A| = |A| \otimes |A| = |A|.$$

(ii): Έστω B ένα πεπερασμένο μη κενό σύνολο. Το B μπορεί να γραφεί ως

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\},$$

όπου $n = |B|$. Ο κανόνας

$$f \mapsto \langle f(b_1), \ldots, f(b_n) \rangle$$

ορίζει μια αμφίρριψη από το ${}^B A$ στο A^n. Επομένως

$$\left|{}^B A\right| = |A^n| = |A|.$$

(iii): Επειδή

$$|\{{}^n A : n \in \omega\}| \leq \omega \leq |A|$$

και $|{}^n A| \leq |A|$ για κάθε $n \in \omega$, έχουμε

$$\left|\bigcup_{n\in\omega} {}^n A\right| \leq |A|.$$

Επίσης,

$$|A| = \left|{}^1 A\right| \leq \left|\bigcup_{n\in\omega} {}^n A\right|.$$

(iv): Ας θέσουμε

$$\mathcal{S} := \{X \subseteq A : X \text{ είναι πεπερασμένο}\}.$$

Επειδή

$$\mathcal{S} = \left\{\operatorname{ran}(f) : f \in \bigcup_{n\in\omega} {}^n A\right\},$$

έχουμε

$$|\mathcal{S}| = \left|\left\{\operatorname{ran}(f) : f \in \bigcup_{n\in\omega} {}^n A\right\}\right| \leq \left|\bigcup_{n\in\omega} {}^n A\right| = |A|.$$

Επίσης, είναι προφανές ότι
$$|A| \leq |\mathcal{S}|\,.$$

■

Αν κ, λ είναι δύο πληθάριθμοι, τότε η **δύναμη** κ^λ ορίζεται από την ισότητα
$$\kappa^\lambda := \left|{}^\lambda\kappa\right|.$$

Η δύναμη αυτή δεν πρέπει να συγχέεται με την αντίστοιχη δύναμη των διατακτικών αριθμών κ και λ (εκτός και αν $\kappa, \lambda \in \omega$, οπότε οι δύο σημασίες του συμβόλου κ^λ ταυτίζονται). Συμφωνούμε ότι στο εξής το σύμβολο κ^λ θα έχει πάντα τη σημασία που αντιστοιχεί στον παραπάνω ορισμό.

Θεώρημα 4.117 *Έστω A, B δύο σύνολα. Τότε*
$$\left|{}^B A\right| = |A|^{|B|}\,.$$

Απόδειξη Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν X, Y είναι σύνολα τέτοια ώστε $A \approx X$ και $B \approx Y$, τότε ${}^B A \approx {}^Y X$. ■

Θεώρημα 4.118 *Έστω κ, λ, μ πληθάριθμοι. Τότε:*

(i) $\kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu = \kappa^{\lambda \oplus \mu}$.

(ii) $\left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$.

(iii) $(\kappa \otimes \lambda)^\mu = \kappa^\mu \otimes \lambda^\mu$.

Απόδειξη (i): Αν A, B, C είναι σύνολα με $B \cap C = \varnothing$, τότε
$${}^B A \times {}^C A \approx {}^{B \cup C} A.$$

(ii): Αν A, B, C είναι τυχαία σύνολα, τότε
$${}^C\left({}^B A\right) \approx {}^{B \times C} A.$$

(iii): Αν A, B, C είναι τυχαία σύνολα, τότε
$${}^C(A \times B) \approx {}^C A \times {}^C B.$$

■

Θεώρημα 4.119 *Έστω A ένα σύνολο. Τότε*

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Απόδειξη Από το Θεώρημα 1.97 έχουμε

$$\mathcal{P}(A) \approx {}^{A}2,$$

και άρα

$$|\mathcal{P}(A)| = \left|{}^{A}2\right| = |2|^{|A|} = 2^{|A|}.$$

■

Θεώρημα 4.120 (Cantor) *Έστω κ ένας πληθάριθμος. Τότε*

$$\kappa < 2^{\kappa}.$$

Απόδειξη Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 1.103 και 4.119, έχουμε

$$\kappa = |\kappa| < |\mathcal{P}(\kappa)| = 2^{|\kappa|} = 2^{\kappa}.$$

■

Θεώρημα 4.121 *Έστω λ ένας άπειρος πληθάριθμος και έστω κ ένας πληθάριθμος τέτοιος ώστε $2 \leq \kappa \leq \lambda$. Τότε*

$$\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}.$$

Απόδειξη Είναι σαφές ότι

$${}^{\lambda}\kappa \subseteq {}^{\lambda}\lambda \subseteq \mathcal{P}(\lambda \times \lambda),$$

οπότε

$$\kappa^{\lambda} = \left|{}^{\lambda}\kappa\right| \leq |\mathcal{P}(\lambda \times \lambda)| = 2^{|\lambda \times \lambda|} = 2^{\lambda \otimes \lambda} = 2^{\lambda}.$$

Επίσης, επειδή

$${}^{\lambda}2 \subseteq {}^{\lambda}\kappa,$$

έχουμε

$$2^{\lambda} = \left|{}^{\lambda}2\right| \leq \left|{}^{\lambda}\kappa\right| = \kappa^{\lambda}.$$

■

Θεώρημα 4.122 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Απόδειξη Ο κανόνας

$$x \mapsto \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$$

ορίζει μια ένριψη από το $\mathbb{R}$ στο $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, οπότε

$$|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{|\mathbb{Q}|} = 2^{\aleph_0}.$$

Από την άλλη μεριά, ο κανόνας

$$\langle x_n \rangle_{n\in\omega} \mapsto 0, x_0 x_1 x_2 \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^{n+1}}$$

ορίζει μια ένριψη από το ${}^{\omega}2$ στο $\mathbb{R}$, επομένως

$$2^{\aleph_0} = |{}^{\omega}2| \leq |\mathbb{R}|.$$

■

Οι **πληθάριθμοι μπεθ** ορίζονται από τις παρακάτω ισότητες:

- $\beth_0 := \omega$.
- $\beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha}$ για κάθε διατακτικό αριθμό α.
- $\beth_\alpha := \sup\{\beth_\xi \mid \xi < \alpha\}$ για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό α.

Θεώρημα 4.123 *Έστω $\alpha, \beta \in$ **ON**. Έχουμε:*

(i) Ο $\beth_\alpha$ είναι άπειρος πληθάριθμος.

(ii) $\aleph_\alpha \leq \beth_\alpha$.

(iii) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \beth_\alpha < \beth_\beta$.

(iv) Υπάρχει $\gamma \geq \alpha$ τέτοιο ώστε $\beth_\gamma = \aleph_\gamma = \gamma$.

Απόδειξη (i) - (iii): Άσκηση.

(iv): Θέτοντας

$$\gamma_0 := \alpha, \quad \gamma_{n+1} := \beth_{\gamma_n},$$

είναι εύκολο να δούμε ότι το

$$\gamma := \sup\{\gamma_n \mid n \in \omega\}$$

έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. ■

Έστω $\alpha \in \mathbf{ON}$. Επειδή $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$, έχουμε $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Γεννάται λοιπόν εύλογα η απορία αν $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$. Η ισότητα

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

λέγεται **υπόθεση του συνεχούς** (ΥΣ). Ο γενικότερος ισχυρισμός ότι

$$\forall \alpha \left(\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha} \right)$$

λέγεται **γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς** (ΓΥΣ). Αποδεικνύεται ότι η ορθότητα των δύο αυτών υποθέσεων δεν μπορεί να αποφασιστεί μέσα στη θεωρία ZFC (αν η ZFC είναι συνεπής, δηλαδή απαλλαγμένη από αντιφάσεις).

Άσκηση 4.124 Δείξτε ότι:

(i) ΥΣ $\Leftrightarrow \aleph_1 = \beth_1$.

(ii) ΓΥΣ $\Leftrightarrow \forall \alpha \, (\aleph_\alpha = \beth_\alpha)$.

Έστω $\alpha \in \mathbf{ON}$. Αν ένα $X \subseteq \alpha$ ικανοποιεί

$$(\forall \eta < \alpha) \, (\exists \xi \in X) \, (\eta \leq \xi) \, ,$$

τότε το X λέγεται **ομοτελικό υποσύνολο** του α. Αν $f : S \longrightarrow \alpha$ και το $\operatorname{ran}(f)$ είναι ομοτελικό υποσύνολο του α, τότε η f λέγεται **ομοτελική συνάρτηση** (στο α). Ένα τετριμμένο παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης είναι η ταυτοτική συνάρτηση $\mathrm{id}_\alpha : \alpha \longrightarrow \alpha$. Ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός β για τον οποίο υπάρχει ομοτελική συνάρτηση $g : \beta \longrightarrow \alpha$ λέγεται **ομοτελικότητα** (cofinality) του α και συμβολίζεται με

$$\mathrm{cf}\,(\alpha) \, .$$

Θεώρημα 4.125 *Έχουμε:*

(i) *Ο* $\mathrm{cf}\,(\alpha)$ *είναι πληθάριθμος.*

(ii) $\mathrm{cf}\,(\alpha) \leq \alpha$.

(iii) $\mathrm{cf}\,(0) = 0$.

(iv) $\mathrm{cf}\,(\alpha + 1) = 1$.

Θεώρημα 4.126 *Για κάθε διατακτικό αριθμό α υπάρχει ομοτελική συνάρτηση $f : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ η οποία επιπλέον είναι και γνησίως αύξουσα.*

Απόδειξη Θα υποθέσουμε ότι ο α είναι οριακός διατακτικός αριθμός (διαφορετικά το αποδεικτέο είναι τετριμμένο). Έστω $g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ μια ομοτελική συνάρτηση. Ορίζουμε την $f : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ θέτοντας

$$f(\xi) := \max\{g(\xi), \sup\{f(\eta) + 1 \mid \eta < \xi\}\}$$

για κάθε $\xi < \mathrm{cf}(\alpha)$. Είναι σαφές ότι η f έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. ∎

Θεώρημα 4.127 *Αν ο α είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε ο $\mathrm{cf}(\alpha)$ είναι άπειρος πληθάριθμος.*

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.126, βλέπουμε εύκολα ότι αν ο α είναι οριακός διατακτικός αριθμός, τότε και ο $\mathrm{cf}(\alpha)$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός. ∎

Θεώρημα 4.128 *Έστω $f : \alpha \longrightarrow \beta$ μια συνάρτηση η οποία είναι ομοτελική και γνησίως αύξουσα. Τότε $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.*

Απόδειξη Διαλέγουμε δύο ομοτελικές συναρτήσεις $g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ και $h : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \beta$. Η $f \circ g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \beta$ είναι ομοτελική, άρα $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$. Στη συνέχεια ορίζουμε μια συνάρτηση $t : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \alpha$ θέτοντας

$$t(\xi) := \min\{\eta < \alpha \mid h(\xi) \leq f(\eta)\}$$

για κάθε $\xi < \mathrm{cf}(\beta)$. Η t είναι ομοτελική, άρα $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$. ∎

Θεώρημα 4.129 *Για κάθε διατακτικό αριθμό α, έχουμε*

$$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha).$$

Απόδειξη Με τα Θεωρήματα 4.126 και 4.128. ∎

Θεώρημα 4.130 *Έστω α ένας οριακός διατακτικός αριθμός. Τότε*

$$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\beth_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha).$$

Απόδειξη Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $f : \alpha \longrightarrow \aleph_\alpha$ και $g : \alpha \longrightarrow \beth_\alpha$ θέτοντας

$$f(\xi) := \aleph_\xi, \quad g(\xi) := \beth_\xi$$

για κάθε $\xi < \alpha$. Οι συναρτήσεις αυτές προφανώς είναι ομοτελικές και γνησίως αύξουσες. Επομένως $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$ και $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beth_\alpha)$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.128. ∎

Έστω κ ένας άπειρος πληθάριθμος. Αν ισχύει η ισότητα

$$\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa,$$

τότε ο κ λέγεται **κανονικός πληθάριθμος**. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν

$$\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa,$$

ο κ λέγεται **ιδιάζων πληθάριθμος**. Παρατηρούμε ότι ο $\aleph_0$ είναι ο ελάχιστος κανονικός πληθάριθμος. Επίσης, αν α είναι ένας οριακός διατακτικός αριθμός, τότε ο $\mathrm{cf}(\alpha)$ είναι κανονικός πληθάριθμος.

Θεώρημα 4.131 *Έστω κ ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε οι ακόλουθες δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) Ο κ είναι κανονικός.

(ii) Για οποιαδήποτε οικογένεια $\mathcal{F}$ με $|\mathcal{F}| < \kappa$ και $|A| < \kappa$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$, έχουμε

$$\left|\bigcup \mathcal{F}\right| < \kappa.$$

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω ότι ο κ είναι κανονικός. Επειδή η ένωση μιας πεπερασμένης οικογένειας πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο σύνολο, μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι $\kappa > \aleph_0$. Ας θεωρήσουμε τώρα μια οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{A_\xi : \xi < \lambda\},$$

όπου $\lambda = |\mathcal{F}| < \kappa$ και $|A_\xi| < \kappa$ για κάθε $\xi < \lambda$. Επειδή $\lambda < \kappa = \mathrm{cf}(\kappa)$, είναι σαφές ότι

$$\sup\{|A_\xi| : \xi < \lambda\} < \kappa.$$

Άρα ο

$$\mu := \max\{\aleph_0,\ \lambda,\ \sup\{|A_\xi| : \xi < \lambda\}\}$$

είναι ένας άπειρος πληθάριθμος $< \kappa$. Έτσι, αφού $|\mathcal{F}| \leq \mu$ και $|A_\xi| \leq \mu$ για κάθε $\xi < \lambda$, έχουμε

$$\left|\bigcup \mathcal{F}\right| \leq \mu < \kappa.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Έστω ότι δεν ισχύει η (i). Αν $f : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ είναι μια ομοτελική συνάρτηση, τότε $|\mathrm{ran}(f)| \leq \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ και $|f(\xi)| \leq f(\xi) < \kappa$ για κάθε $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$, αλλά

$$\left|\bigcup \mathrm{ran}(f)\right| = |\kappa| = \kappa.$$

Επομένως δεν ισχύει ούτε η (ii). ∎

Θεώρημα 4.132 *Έστω κ ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε ο πληθάριθμος κ^+ είναι κανονικός.*

Απόδειξη Ας θεωρήσουμε μια οικογένεια $\mathcal{F}$ τέτοια ώστε $|\mathcal{F}| < \kappa^+$ και $|A| < \kappa^+$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Επειδή $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ και $|A| \leq \kappa$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$, έχουμε

$$\left|\bigcup \mathcal{F}\right| \leq \kappa < \kappa^+.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.131, ο κ^+ είναι κανονικός. ∎

Θεώρημα 4.133 (τύπος του Hausdorff) *Έστω κ, λ άπειροι πληθάριθμοι. Τότε*

$$\left(\kappa^+\right)^\lambda = \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda.$$

Ισοδύναμα, έχουμε

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \otimes \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$$

για κάθε α και β.

Απόδειξη Είναι σαφές ότι $\kappa^+ \leq (\kappa^+)^\lambda$ και $\kappa^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda$, οπότε

$$\kappa^+ \otimes \kappa^\lambda = \max\left\{\kappa^+, \kappa^\lambda\right\} \leq \left(\kappa^+\right)^\lambda.$$

Για την απόδειξη της ανισότητας

$$\left(\kappa^+\right)^\lambda \leq \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda$$

θα χρειαστεί να εξετάσουμε χωριστά τις περιπτώσεις $\kappa^+ \leq \lambda$ και $\kappa^+ > \lambda$. Αν $\kappa^+ \leq \lambda$, τότε

$$\left(\kappa^+\right)^\lambda = 2^\lambda = \kappa^\lambda \leq \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda.$$

Αν $\kappa^+ > \lambda$, τότε έχουμε ${}^\lambda(\kappa^+) = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} {}^\lambda\alpha$ (λόγω της κανονικότητας του κ^+) και άρα

$$\left(\kappa^+\right)^\lambda = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa^+} {}^\lambda\alpha\right| \leq \kappa^+ \otimes \kappa^\lambda.$$

∎

Θεώρημα 4.134 *Έστω κ ένας άπειρος πληθάριθμος. Τότε*

$$\left(\kappa^+\right)^\kappa = 2^\kappa.$$

Απόδειξη Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Hausdorff, έχουμε

$$\left(\kappa^+\right)^\kappa = \kappa^+ \otimes \kappa^\kappa = \kappa^+ \otimes 2^\kappa = \max\left\{\kappa^+, 2^\kappa\right\} = 2^\kappa.$$

■

Το **άθροισμα** $\bigoplus_{i\in I}\kappa_i$ και το **γινόμενο** $\bigotimes_{i\in I}\kappa_i$ μιας οικογένειας πληθαρίθμων $\{\kappa_i : i \in I\}$ ορίζονται από τις ισότητες

$$\bigoplus_{i\in I}\kappa_i := \left|\bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})\right|$$

και

$$\bigotimes_{i\in I}\kappa_i := \left|\prod_{i\in I}\kappa_i\right|.$$

Παρατήρηση 4.135 Οι παραπάνω συμβολισμοί, αν και δεν είναι καθιερωμένοι, εναρμονίζονται με τους συμβολισμούς $\kappa \oplus \lambda$ και $\kappa \otimes \lambda$. Στη διεθνή βιβλιογραφία, συνήθως αντί για το $\bigoplus_{i\in I}\kappa_i$ χρησιμοποιείται το $\sum_{i\in I}\kappa_i$, και αντί για το $\bigotimes_{i\in I}\kappa_i$ χρησιμοποιείται το $\prod_{i\in I}\kappa_i$ (που όμως δεν πρέπει να συγχέεται με το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in I}\kappa_i$).

Θεώρημα 4.136 *Έστω $\{A_i : i \in I\}$ μια οικογένεια συνόλων. Τότε:*

(i) $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right| = \bigoplus_{i\in I}|A_i|$, *υπό την προϋπόθεση ότι η $\{A_i : i \in I\}$ είναι ξένη (δηλαδή $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$).*

(ii) $\left|\prod_{i\in I}A_i\right| = \bigotimes_{i\in I}|A_i|$.

Απόδειξη (i): Ας υποθέσουμε ότι η $\{A_i : i \in I\}$ είναι ξένη. Αν η οικογένεια $\{B_i : i \in I\}$ είναι επίσης ξένη και ικανοποιεί $A_i \approx B_i$ για κάθε $i \in I$, τότε

$$\bigcup_{i\in I}A_i \approx \bigcup_{i\in I}B_i.$$

(ii): Αν η οικογένεια $\{B_i : i \in I\}$ ικανοποιεί $A_i \approx B_i$ για κάθε $i \in I$, τότε

$$\prod_{i\in I}A_i \approx \prod_{i\in I}B_i.$$

■

Θεώρημα 4.137 *Έστω κ, λ δύο πληθάριθμοι. Τότε:*

(i) $\bigoplus_{\alpha<\lambda} \kappa = \kappa \otimes \lambda$.

(ii) $\bigotimes_{\alpha<\lambda} \kappa = \kappa^{\lambda}$.

Θεώρημα 4.138 (König) *Έστω $\{\kappa_i : i \in I\}$ και $\{\lambda_i : i \in I\}$ δύο οικογένειες πληθαρίθμων τέτοιες ώστε $\kappa_i < \lambda_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε*

$$\bigoplus_{i\in I} \kappa_i < \bigotimes_{i\in I} \lambda_i.$$

Απόδειξη Ορίζουμε μια συνάρτηση $f : \bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \lambda_i$ θέτοντας

$$f(\xi, i)_i := \xi + 1,$$

$$f(\xi, i)_j := 0, \quad j \in I - \{i\}.$$

Η f είναι $1-1$, οπότε $\bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\}) \precsim \prod_{i\in I} \lambda_i$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει επιρριπτική συνάρτηση από το σύνολο $\bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\})$ στο σύνολο $\prod_{i\in I} \lambda_i$. Έστω $g : \bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\}) \longrightarrow \prod_{i\in I} \lambda_i$. Αν για κάθε $i \in I$ θέσουμε

$$\alpha_i := \min\left(\lambda_i - \{g(\xi, i)_i \mid \xi < \kappa_i\}\right),$$

τότε

$$\langle \alpha_i \rangle_{i\in I} \in \left(\prod_{i\in I} \lambda_i\right) - \operatorname{ran}(g)$$

και άρα η g δεν είναι επιρριπτική. ■

Παρατήρηση 4.139 Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του König, μπορούμε να δώσουμε μια σύντομη απόδειξη της ανισότητας $\kappa < 2^{\kappa}$:

$$\kappa = \bigoplus_{\alpha<\kappa} 1 < \bigotimes_{\alpha<\kappa} 2 = 2^{\kappa}.$$

Λήμμα 4.140 *Κάθε άπειρος πληθάριθμος κ μπορεί να γραφεί ως*

$$\kappa = \bigoplus_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\alpha,$$

όπου $\{\lambda_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ είναι μια οικογένεια πληθαρίθμων τέτοια ώστε $\lambda_\alpha < \kappa$ για κάθε $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$.

Απόδειξη Έστω $f : \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ μια ομοτελική συνάρτηση (όπου ο κ είναι άπειρος πληθάριθμος). Θέτοντας

$$X_\alpha := f(\alpha) - \bigcup_{\xi<\alpha} f(\xi)$$

για κάθε $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, είναι σαφές ότι η οικογένεια $\{X_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ είναι ξένη και $\kappa = \bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} X_\alpha$. Έχουμε λοιπόν

$$\kappa = |\kappa| = \left| \bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} X_\alpha \right| = \bigoplus_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} |X_\alpha|,$$

οπότε μπορούμε να πάρουμε

$$\lambda_\alpha := |X_\alpha|$$

για κάθε $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. ■

Θεώρημα 4.141 *Έστω κ, λ δύο άπειροι πληθάριθμοι. Τότε:*

(i) $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$.

(ii) $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$.

(iii) $\mathrm{cf}\left(\kappa^\lambda\right) > \lambda$.

Απόδειξη (i): Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, ο κ μπορεί να γραφεί ως

$$\kappa = \bigoplus_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\alpha,$$

όπου $\{\lambda_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ είναι μια οικογένεια πληθαρίθμων τέτοια ώστε $\lambda_\alpha < \kappa$ για κάθε $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα του König, έχουμε

$$\kappa = \bigoplus_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\alpha < \bigotimes_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

(ii): Έστω ότι $\mathrm{cf}(2^\kappa) \leq \kappa$. Τότε

$$(2^\kappa)^{\mathrm{cf}(2^\kappa)} \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\otimes\kappa} = 2^\kappa.$$

Αυτό όμως αντιβαίνει στο (i).

(iii): Έστω ότι $\mathrm{cf}\left(\kappa^{\lambda}\right) \leq \lambda$. Τότε

$$\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mathrm{cf}\left(\kappa^{\lambda}\right)} \leq \left(\kappa^{\lambda}\right)^{\lambda} = \kappa^{\lambda \otimes \lambda} = \kappa^{\lambda}.$$

Αυτό όμως αντιβαίνει στο (i). ■

Θεώρημα 4.142 *Έστω ότι ισχύει η ΓΥΣ και έστω κ, λ δύο άπειροι πληθάριθμοι. Τότε:*

$$\kappa^{\lambda} = \begin{cases} \lambda^{+} & \textit{αν } \kappa < \lambda, \\ \kappa^{+} & \textit{αν } \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa, \\ \kappa & \textit{αν } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa). \end{cases}$$

Απόδειξη Αν $\kappa < \lambda$, τότε

$$\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda} = \lambda^{+}.$$

Αν $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda \leq \kappa$, τότε

$$\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^{\lambda} \leq \kappa^{\kappa} = 2^{\kappa} = \kappa^{+}$$

και άρα

$$\kappa^{\lambda} = \kappa^{+}.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Τότε προφανώς

$${}^{\lambda}\kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} {}^{\lambda}\alpha.$$

Επίσης, αν $\alpha < \kappa$ και $\mu := \max\{|\alpha|, \lambda\}$, τότε

$$\left|{}^{\lambda}\alpha\right| = |\alpha|^{\lambda} \leq \mu^{\lambda} \leq \mu^{\mu} = 2^{\mu} = \mu^{+} \leq \kappa.$$

Επομένως

$$\kappa^{\lambda} = \left|\bigcup_{\alpha < \kappa} {}^{\lambda}\alpha\right| \leq \kappa$$

και έτσι

$$\kappa^{\lambda} = \kappa.$$

■

Αν ένας πληθάριθμος $\kappa > \omega$ ικανοποιεί $2^{\lambda} < \kappa$ για κάθε πληθάριθμο $\lambda < \kappa$, τότε ο κ λέγεται **ισχυρός οριακός πληθάριθμος**. Παρατηρούμε ότι:

(i) Κάθε ισχυρός οριακός πληθάριθμος είναι οριακός πληθάριθμος.

(ii) Αν ο κ είναι ισχυρός οριακός πληθάριθμος, τότε $\mu^\lambda < \kappa$ για οποιουσδήποτε δύο πληθαρίθμους $\mu, \lambda < \kappa$.

(iii) Αν ισχύει η ΓΥΣ, τότε οι έννοιες "οριακός πληθάριθμος" και "ισχυρός οριακός πληθάριθμος" ταυτίζονται.

Θεώρημα 4.143 *Για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό α, ο $\beth_\alpha$ είναι ισχυρός οριακός πληθάριθμος. Αντίστροφα, κάθε ισχυρός οριακός πληθάριθμος έχει τη μορφή $\beth_\alpha$ για κάποιον οριακό διατακτικό αριθμό α.*

Απόδειξη Το πρώτο μέρος αφήνεται ως άσκηση. Για το δεύτερο μέρος, έστω ότι ο κ είναι ισχυρός οριακός πληθάριθμος. Τότε ο

$$\alpha := \{\xi \mid \beth_\xi < \kappa\}$$

είναι ένας οριακός διατακτικός αριθμός και $\kappa = \beth_\alpha$. ■

Αν ένας οριακός (αντ. ισχυρός οριακός) πληθάριθμος κ είναι επιπλέον και κανονικός, τότε ο κ λέγεται **ασθενώς απρόσιτος** (αντ. **ισχυρά απρόσιτος**). Φυσικά κάθε ισχυρά απρόσιτος πληθάριθμος είναι και ασθενώς απρόσιτος, ενώ υπό τη ΓΥΣ οι δύο έννοιες ταυτίζονται.

Θεώρημα 4.144 *Αν ο $\aleph_\alpha$ είναι ασθενώς απρόσιτος, τότε $\aleph_\alpha = \alpha$.*

Απόδειξη Υποθέτοντας ότι ο $\aleph_\alpha$ είναι ασθενώς απρόσιτος, έχουμε

$$\aleph_\alpha = \mathrm{cf}\,(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}\,(\alpha) \leq \alpha \leq \aleph_\alpha.$$

■

Είναι γνωστό ότι η ύπαρξη ασθενώς απρόσιτων πληθαρίθμων δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στη θεωρία ZFC (αν η ZFC είναι συνεπής).

Κατάλογος συμβολισμών

$\mathbb{N}$ .... το σύνολο των φυσικών αριθμών

$\mathbb{Z}$ .... το σύνολο των ακέραιων αριθμών

$\mathbb{Z}^+$ .... το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών

$\mathbb{Q}$ .... το σύνολο των ρητών αριθμών

$\mathbb{Q}^+$ .... το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών

$\mathbb{R}$ .... το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$\mathbb{R}^+$ .... το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών

$\mathbb{C}$ .... το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

$x \in A$ ή $A \ni x$ .... το x ανήκει στο σύνολο A

$x \notin A$ .... το x δεν ανήκει στο σύνολο A

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .... το σύνολο με στοιχεία $a_1, a_2, \dots, a_n$

$\neg\varphi$ .... όχι φ

$\varphi \wedge \vartheta$ .... φ και ϑ

$\varphi \vee \vartheta$ .... φ ή ϑ

$\varphi \Rightarrow \vartheta$ .... φ συνεπάγεται ϑ

$\varphi \Leftrightarrow \vartheta$ .... φ αν και μόνον αν ϑ

$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ .... φ_1 και φ_2 και ... και φ_n

$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ .... φ_1 ή φ_2 ή ... ή φ_n

$\forall x$ .... για κάθε x

$\exists x$ .... υπάρχει x

$\exists ! x$ .... υπάρχει μοναδικό x

$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ .... τύπος με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$

$\{x \mid \varphi(x)\}$ ή $\{x : \varphi(x)\}$ .... το σύνολο όλων των x τα οποία ικανοποιούν τη συνθήκη $\varphi(x)$

$\varnothing$ .... το κενό σύνολο

$A \subseteq B$ ή $B \supseteq A$ .... το A είναι υποσύνολο του B

$A \subset B$ ή $B \supset A$ .... το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B

$A \nsubseteq B$ .... το A δεν είναι υποσύνολο του B

$\langle a, b\rangle$ .... το διατεταγμένο ζεύγος των a, b

$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ .... η διατεταγμένη n-άδα των $a_1, \ldots, a_n$

$A \cup B$ .... η ένωση δύο συνόλων A, B

$A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ή $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ .... η ένωση των συνόλων $A_1, \ldots, A_n$

$\bigcup \mathcal{F}$ ή $\bigcup\{A \mid A \in \mathcal{F}\}$ ή $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ .... η ένωση μιας οικογένειας $\mathcal{F}$

$A \cap B$ .... η τομή δύο συνόλων A, B

$A_1 \cap \cdots \cap A_n$ ή $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ .... η τομή των συνόλων $A_1, \ldots, A_n$

$\bigcap \mathcal{F}$ ή $\bigcap\{A \mid A \in \mathcal{F}\}$ ή $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ .... η τομή μιας οικογένειας $\mathcal{F}$

$\bigcup_{i \in I} A_i$ .... η ένωση της οικογένειας $\{A_i \mid i \in I\}$

$\bigcap_{i \in I} A_i$ .... η τομή της οικογένειας $\{A_i \mid i \in I\}$

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .... $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}^+} A_i$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ .... $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}^+} A_i$

$A - B$ ή $A \setminus B$ .... η διαφορά δύο συνόλων A, B

A' .... το συμπλήρωμα ενός συνόλου A (ως προς κάποιο υπερσύνολο)

$A \triangle B$ .... η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων A, B

$\mathcal{P}(A)$ .... το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A

$A \times B$ .... το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A, B

$A_1 \times \cdots \times A_n$ .... το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $A_1, \ldots, A_n$

A^n .... το καρτεσιανό γινόμενο $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ φορές}}$

$\mathrm{dom}(f)$ .... το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f

$\mathrm{ran}(f)$ .... το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης f

$f(x)$ .... η τιμή της συνάρτησης f στο x

$x \mapsto f(x)$ .... η συνάρτηση f απεικονίζει το x στο $f(x)$

$f : A \longrightarrow B$ ή $A \xrightarrow{f} B$ .... η f είναι συνάρτηση από το A στο B

${}^{A}B$ .... το σύνολο των συναρτήσεων από το A στο B

$1-1$ .... ένα προς ένα

id_A .... η ταυτοτική συνάρτηση πάνω στο A

$f \restriction A$ ή $f|A$ ή $f|_A$ .... ο περιορισμός της συνάρτησης f στο A

$i : A \hookrightarrow B$ .... η συνάρτηση εγκλεισμού του A μέσα στο B

$f[C]$ .... η εικόνα του C μέσω της συνάρτησης f

$f^{-1}[D]$ .... η αντίστροφη εικόνα του D μέσω της συνάρτησης f

$f(x_1, \ldots, x_n)$ .... $f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$

$g \circ f$ .... η σύνθεση δύο συναρτήσεων f και g

f^{-1} .... η αντίστροφη μιας αμφίρριψης f

$\langle a_i \mid i \in I \rangle$ ή $\langle a_i \rangle_{i \in I}$ .... η συνάρτηση $i \mapsto a_i$ πάνω στο I

$\prod_{i \in I} A_i$ .... το καρτεσιανό γινόμενο της οικογένειας $\{A_i \mid i \in I\}$

$R(x_1, \ldots, x_n)$ .... $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R$

$x \, R \, y$ .... $\langle x, y \rangle \in R$

$x \not R \, y$ .... $\langle x, y \rangle \notin R$

R_B .... ο περιορισμός της σχέσης R στο σύνολο B

$=_A$ .... η ταυτοτική σχέση πάνω σε ένα σύνολο A

$\subseteq_{\mathcal{F}}$ .... η σχέση $\subseteq$ πάνω σε μια οικογένεια $\mathcal{F}$

$\subset_{\mathcal{F}}$ .... η σχέση $\subset$ πάνω σε μια οικογένεια $\mathcal{F}$

$[x]$ ή $[x]_{\equiv}$ ή $x/\equiv$ .... η κλάση ισοδυναμίας του x ως προς την $\equiv$

$A/\equiv$ .... το σύνολο πηλίκο του A διά της $\equiv$

$a \equiv b \pmod{n}$ .... ισοτιμία modulo n

$[a]_n$ .... κλάση καταλοίπου a modulo n

$\mathbb{Z}_n$ .... το σύνολο πηλίκο του $\mathbb{Z}$ διά της ισοτιμίας modulo n

$A/\mathcal{F}$ .... η σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από μια διαμέριση $\mathcal{F}$ του A

$\max B$ .... το μέγιστο στοιχείο του B

$\min B$ .... το ελάχιστο στοιχείο του B

$\sup B$ .... το ελάχιστο άνω φράγμα του B

$x \overset{U}{\equiv} y$ .... $x - y \in U$

$x + U$ .... το σύνολο $\{x + u : u \in U\}$

R/U .... δακτύλιος πηλίκο

$\mathbb{P}_R$ .... το ελάχιστο επαγωγικό υποσύνολο ενός δακτυλίου R

$\widehat{a}$ .... στοιχειώδης τομή Dedekind

$\langle x_n \rangle \subseteq X$ .... η $\langle x_n \rangle$ είναι μια ακολουθία στοιχείων του συνόλου X

$x_n \to x \quad$ καθώς $\quad n \to \infty$ .... η ακολουθία $\langle x_n \rangle$ συγκλίνει στο x

$\lim_{n\to\infty} x_n$ .... το όριο της ακολουθίας $\langle x_n \rangle$

$\mathbf{V}$ .... το σύμπαν

$\mathbf{A}_x$ .... το σύνολο $\{y \in \mathbf{A} \mid y < x\}$, όπου $\langle \mathbf{A}, < \rangle$ είναι μια καλώς διατεταγμένη κλάση και $x \in \mathbf{A}$

$\in_A$ .... η σχέση $\left\{\langle x, y \rangle \in A^2 \mid x \in y\right\}$

$\mathbf{ON}$ .... η κλάση όλων των διατακτικών αριθμών

$\mathrm{ord}\,(A)$ .... ο διατακτικός τύπος ενός καλώς διατεταγμένου συνόλου A

Sc .... η πράξη διαδοχής

ω .... το σύνολο των φυσικών αριθμών

$\mathrm{supp}\,(f)$ .... ο φορέας μιας συνάρτησης $f : \beta \longrightarrow \alpha$

$E\,(\beta, \alpha)$ .... το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f \in {}^{\beta}\alpha$ με πεπερασμένο φορέα

V_α .... τα μέλη της συσσωρευτικής ιεραρχίας συνόλων

$\mathbf{WF}$ .... η κλάση των καλώς θεμελιωμένων συνόλων

$\mathrm{rank}\,(x)$ .... ο βαθμός ενός καλώς θεμελιωμένου συνόλου x

$\mathrm{TC}(A)$ .... το μεταβατικό περίβλημα ενός συνόλου A

$|A|$ .... ο πληθάριθμος ενός συνόλου A

$\mathcal{H}(A)$ .... ο αριθμός Hartogs ενός συνόλου A

α^+ .... ο αριθμός Hartogs ενός διατακτικού αριθμού α

$\aleph_\alpha$ ή ω_α .... οι πληθάριθμοι άλεφ

$\kappa \oplus \lambda$ .... το άθροισμα δύο πληθαρίθμων κ, λ

$\kappa \otimes \lambda$ .... το γινόμενο δύο πληθαρίθμων κ, λ

κ^λ .... η δύναμη δύο πληθαρίθμων κ, λ

$\beth_\alpha$ .... οι πληθάριθμοι μπεθ

$\mathrm{cf}(\alpha)$ .... η ομοτελικότητα ενός διατακτικού αριθμού α

$\bigoplus_{i \in I} \kappa_i$ .... το άθροισμα μιας οικογένειας πληθαρίθμων $\{\kappa_i : i \in I\}$

$\bigotimes_{i \in I} \kappa_i$ .... το γινόμενο μιας οικογένειας πληθαρίθμων $\{\kappa_i : i \in I\}$

Βιβλιογραφία

[1] Κ. Κάλφα, *Αξιωματική Θεωρία Συνόλων,* Εκδόσεις Ζήτη, 1990.

[2] Αθ. Τζουβάρας, *Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής,* Εκδόσεις Ζήτη, 1998.

[3] J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic,* North-Holland, 1977

[4] P. M. Cohn, *Algebra, Volume 1,* Wiley, 1982

[5] P. M. Cohn, *Algebra, Volume 2,* Wiley, 1989

[6] K. J. Devlin, *Fundamentals of Contemporary Set Theory,* Springer, 1979

[7] F. Q. Gouvêa, *p-adic Numbers: An Introduction,* Springer, 1997

[8] K. Hrbacek & T. Jech, *Introduction to Set Theory,* Marcel Dekker, 1999

[9] T. Jech, *Set Theory,* Springer, 2006

[10] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs,* North-Holland, 1980

[11] A. Levy, *Basic Set Theory,* Dover Publications, 2002.

[12] E. Mendelson, *Number Systems and the Foundations of Analysis,* Academic Press, 1973

[13] Y. Moschovakis, *Notes on Set Theory,* Springer, 2006

[14] J. Roitman, *Introduction to Modern Set Theory,* Wiley, 1990

Ευρετήριο

Ο Γ. Πέρρος είναι εκπαιδευτικός. Έχει σπουδάσει Μαθηματικά στο Πανεπιστήμιο του Νιουκάστλ και Μαθηματική Λογική στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου.